Função de Verossimilhança

Who? Paulo Inácio K.L. Prado e João L.F. Batista

From? BIE 5781 Modelagem Estatísticos em Ecologia e Recursos Naturais

When? junho de 2009

Sumário

Sumário

Sumário

Sumário

- Introdução
- Lei de Verossimilhança
- Função de Verossimilhança

Sumário

Sumário

Sumário

Sumário

- Introdução
- Lei de Verossimilhança
- Função de Verossimilhança
- Princípio de Verossimilhança
- Mútliplas Observações Independentes
- Função de Log-Verossimilhança Negativa
- Método da Máxima Verossimilhança

Sumário

Sumário

Sumário

Plausibilidade x Verossimilhança

Dicionário Priberam (http://www.priberam.pt):

Plausibilidade x Verossimilhança

Dicionário Priberam (http://www.priberam.pt):

Plausibilidade x Verossimilhança

Dicionário Priberam (http://www.priberam.pt):

Plausibilidade: qualidade do que é plausível.

Plausibilidade x Verossimilhança

Dicionário Priberam (http://www.priberam.pt):

Plausibilidade: qualidade do que é plausível.

Plausível:

Plausibilidade x Verossimilhança

Dicionário Priberam (http://www.priberam.pt):

Plausibilidade: qualidade do que é plausível.

Plausível:

que merece aplauso ou aprovação;

Plausibilidade x Verossimilhança

Dicionário Priberam (http://www.priberam.pt):

Plausibilidade: qualidade do que é plausível.

Plausível:

que merece aplauso ou aprovação;

aceitável;

Plausibilidade x Verossimilhança

Dicionário Priberam (http://www.priberam.pt):

Plausibilidade: qualidade do que é plausível.

Plausível:

que merece aplauso ou aprovação;

aceitável;

verossímil.

Plausibilidade x Verossimilhança

Dicionário Priberam (http://www.priberam.pt):

Plausibilidade: qualidade do que é plausível.

Plausível:

que merece aplauso ou aprovação;

aceitável;

verossímil.

Plausibilidade x Verossimilhança

Dicionário Priberam (http://www.priberam.pt):

Plausibilidade: qualidade do que é plausível.

Plausível:

que merece aplauso ou aprovação;

aceitável;

verossímil.

Verossímil: verosímil.

Plausibilidade x Verossimilhança

Dicionário Priberam (http://www.priberam.pt):

Plausibilidade: qualidade do que é plausível.

Plausível:

que merece aplauso ou aprovação;

aceitável;

verossímil.

Verossímil: verosímil.

Verosímil:

Plausibilidade x Verossimilhança

Dicionário Priberam (http://www.priberam.pt):

Plausibilidade: qualidade do que é plausível.

Plausível:

que merece aplauso ou aprovação;

aceitável;

verossímil.

Verossímil: verosímil.

Verosímil:

semelhante à verdade;

Plausibilidade x Verossimilhança

Dicionário Priberam (http://www.priberam.pt):

Plausibilidade: qualidade do que é plausível.

Plausível:

que merece aplauso ou aprovação;

aceitável;

verossímil.

Verossímil: verosímil.

Verosímil:

semelhante à verdade;

que aparenta ser verdadeiro;

Plausibilidade x Verossimilhança

Dicionário Priberam (http://www.priberam.pt):

Plausibilidade: qualidade do que é plausível.

Plausível:

que merece aplauso ou aprovação;

aceitável;

verossímil.

Verossímil: verosímil.

Verosímil:

semelhante à verdade;

que aparenta ser verdadeiro;

que não repugna à verdade;

Plausibilidade x Verossimilhança

Dicionário Priberam (http://www.priberam.pt):

Plausibilidade: qualidade do que é plausível.

Plausível:

que merece aplauso ou aprovação;

aceitável;

verossímil.

Verossímil: verosímil.

Verosímil:

semelhante à verdade;

que aparenta ser verdadeiro;

que não repugna à verdade;

provável;

Plausibilidade x Verossimilhança

Dicionário Priberam (http://www.priberam.pt):

Plausibilidade: qualidade do que é plausível.

Plausível:

que merece aplauso ou aprovação;

aceitável;

verossímil.

Verossímil: verosímil.

Verosímil:

semelhante à verdade;

que aparenta ser verdadeiro;

que não repugna à verdade;

provável;

plausível.

Plausibilidade x Verossimilhança

Plausibilidade x Verossimilhança

No dicionário:

Plausibilidade x Verossimilhança

No dicionário:

Conclusão: Plausibilidade = Verossimilhança.

Plausibilidade x Verossimilhança

No dicionário:

Conclusão: Plausibilidade = Verossimilhança.

Plausibilidade: linguagem corrente, coloquial.

Plausibilidade x Verossimilhança

No dicionário:

Conclusão: Plausibilidade = Verossimilhança.

Plausibilidade: linguagem corrente, coloquial.

Verossimilhança: linguagem técnica.

Plausibilidade x Verossimilhança

No dicionário:

Conclusão: Plausibilidade = Verossimilhança.

Plausibilidade: linguagem corrente, coloquial.

Verossimilhança: linguagem técnica.

Na Estatística:

Plausibilidade x Verossimilhança

No dicionário:

Conclusão: Plausibilidade = Verossimilhança.

Plausibilidade: linguagem corrente, coloquial.

Verossimilhança: linguagem técnica.

Na Estatística:

A abordagem da Verossimilhança se apoia em dois conceitos básicos:

Plausibilidade x Verossimilhança

No dicionário:

Conclusão: Plausibilidade = Verossimilhança.

Plausibilidade: linguagem corrente, coloquial.

Verossimilhança: linguagem técnica.

Na Estatística:

A abordagem da Verossimilhança se apoia em dois conceitos básicos:

Lei da Verossimilhança: de aceitação geral entre os estatísticos de todas as tribos.

Plausibilidade x Verossimilhança

No dicionário:

Conclusão: Plausibilidade = Verossimilhança.

Plausibilidade: linguagem corrente, coloquial.

Verossimilhança: linguagem técnica.

Na Estatística:

A abordagem da Verossimilhança se apoia em dois conceitos básicos:

Lei da Verossimilhança: de aceitação geral entre os estatísticos de todas as tribos.

Princípio de Verossimilhança: de aceitação mais restrita, embora seja um pilar filosófico da Estatística como Ciência.

Lei de Verossimilhança

Lei de Verossimilhança

Lei de Verossimilhança

Hipótese A: $X = x$ seria observado com prob. $p_A(x)$

Lei de Verossimilhança

Hipótese A: $X = x$ seria observado com prob. $p_A(x)$

Hipótese B: $X = x$ seria observado com prob. $p_B(x)$

Lei de Verossimilhança

Hipótese A: $X = x$ seria observado com prob. $p_A(x)$

Hipótese B: $X = x$ seria observado com prob. $p_B(x)$

Lei de Verossimilhança: A observação $X = x$ favorece a hipótese A sobre a hipótese B se e somente se:

$$p_A(x) > p_B(x).$$

Lei de Verossimilhança

Comparação de Hipótes

Hipótese A: $X = x$ seria observado com prob. $p_A(x)$

Hipótese B: $X = x$ seria observado com prob. $p_B(x)$

Lei de Verossimilhança:

A observação $X = x$ favorece a hipótese A sobre a hipótese B se e somente se:

$$p_A(x) > p_B(x).$$

Razão de Verossimilhança:

A força de evidência em favor da hipótese A sobre a hipótese B é dada pela razão:

$$\frac{p_A(x)}{p_B(x)}$$

Exemplo: Regeneração Natural

Exemplo: Regeneração Natural

Exemplo: Regeneração Natural

Hipótese A: o número médio de plântulas é 16 (5700 ind/ha)

Exemplo: Regeneração Natural

Hipótese A: o número médio de plântulas é 16 (5700 ind/ha)

Hipótese B: o número médio de plântulas é 35 (12500 ind/ha)

Exemplo: Regeneração Natural

Hipótese A: o número médio de plântulas é 16 (5700 ind/ha)

Hipótese B: o número médio de plântulas é 35 (12500 ind/ha)

Exemplo: Regeneração Natural

Hipótese A: o número médio de plântulas é 16 (5700 ind/ha)

Hipótese B: o número médio de plântulas é 35 (12500 ind/ha)

Parcela: observou-se 24 plântulas (8470 ind/ha)

Exemplo: Regeneração Natural

Hipótese A: o número médio de plântulas é 16 (5700 ind/ha)

Hipótese B: o número médio de plântulas é 35 (12500 ind/ha)

Parcela: observou-se 24 plântulas (8470 ind/ha)

Exemplo: Regeneração Natural

Hipótese A: o número médio de plântulas é 16 (5700 ind/ha)

Hipótese B: o número médio de plântulas é 35 (12500 ind/ha)

Parcela: observou-se 24 plântulas (8470 ind/ha)

X (variável aleatória "número de plântulas") é Poisson.

Exemplo: Regeneração Natural

Hipótese A: o número médio de plântulas é 16 (5700 ind/ha)

Hipótese B: o número médio de plântulas é 35 (12500 ind/ha)

Parcela: observou-se 24 plântulas (8470 ind/ha)

X (variável aleatória "número de plântulas") é Poisson.

Probabilidade — ***função de densidade***:

$$P(X = x) = \frac{\mathrm{e}^{-\mu}\mu^x}{x!}$$

Exemplo: Regeneração Natural

Hipótese A: o número médio de plântulas é 16 (5700 ind/ha)

Hipótese B: o número médio de plântulas é 35 (12500 ind/ha)

Parcela: observou-se 24 plântulas (8470 ind/ha)

X (variável aleatória "número de plântulas") é Poisson.

Probabilidade — ***função de densidade***:

$$P(X = x) = \frac{\mathrm{e}^{-\mu}\mu^x}{x!}$$

x é o valor de uma observação;

Exemplo: Regeneração Natural

Hipótese A: o número médio de plântulas é 16 (5700 ind/ha)

Hipótese B: o número médio de plântulas é 35 (12500 ind/ha)

Parcela: observou-se 24 plântulas (8470 ind/ha)

X (variável aleatória "número de plântulas") é Poisson.

Probabilidade — ***função de densidade***:

$$P(X = x) = \frac{\mathrm{e}^{-\mu}\mu^x}{x!}$$

x é o valor de uma observação;

μ (parâmetro) é o número médio de plântulas.

Exemplo: Regeneração Natural

Exemplo: Regeneração Natural

Exemplo: Regeneração Natural

Probabilidade sob as hipóteses

Hipótese A: $\mu = 16$

$$p_A(24) = \frac{\mathsf{e}^{-16} 16^{24}}{24!} = 0.01437018$$

Exemplo: Regeneração Natural

Hipótese A: $\mu = 16$

$$p_A(24) = \frac{\mathrm{e}^{-16}16^{24}}{24!} = 0.01437018$$

Hipótese B: $\mu = 35$

$$p_B(24) = \frac{\mathrm{e}^{-35}35^{24}}{24!} = 0.01160434$$

Exemplo: Regeneração Natural

Hipótese A: $\mu = 16$

$$p_A(24) = \frac{\mathrm{e}^{-16}16^{24}}{24!} = 0.01437018$$

Hipótese B: $\mu = 35$

$$p_B(24) = \frac{\mathrm{e}^{-35}35^{24}}{24!} = 0.01160434$$

Exemplo: Regeneração Natural

Probabilidade sob as hipóteses

Hipótese A: $\mu = 16$

$$p_A(24) = \frac{\mathrm{e}^{-16}16^{24}}{24!} = 0.01437018$$

Hipótese B: $\mu = 35$

$$p_B(24) = \frac{\mathrm{e}^{-35}35^{24}}{24!} = 0.01160434$$

Razão de Verossimilhança

$$\frac{p_A(24)}{p_B(24)} = \frac{0.01437018}{0.01160434} = 1.238345.$$

Função de Verossimilhança: Poisson

Função de Verossimilhança: Poisson

Função de Verossimilhança: Poisson

É função da variável aleatória X, assumindo que o parâmetro (μ) é conhecido:

Função de Verossimilhança: Poisson

É função da variável aleatória X, assumindo que o parâmetro (μ) é conhecido:

$$f(x|\mu) = P(X = x|\mu) = \frac{\mathrm{e}^{-\mu}\mu^x}{x!}$$

Função de Verossimilhança: Poisson

É função da variável aleatória X, assumindo que o parâmetro (μ) é conhecido:

$$f(x|\mu) = P(X = x|\mu) = \frac{\mathrm{e}^{-\mu}\mu^{x}}{x!}$$

Função de Verossimilhança: Poisson

Função de Densidade

É função da variável aleatória X, assumindo que o parâmetro (μ) é conhecido:

$$f(x|\mu) = P(X = x|\mu) = \frac{\mathrm{e}^{-\mu}\mu^x}{x!}$$

Quando o Dado é Conhecido?

Se o dado é conhecido $(X = 24)$, a função passa a depender do valor do parâmetro desconhecido (μ):

Função de Verossimilhança: Poisson

Função de Densidade

É função da variável aleatória X, assumindo que o parâmetro (μ) é conhecido:

$$f(x|\mu) = P(X = x|\mu) = \frac{\mathrm{e}^{-\mu}\mu^x}{x!}$$

Quando o Dado é Conhecido?

Se o dado é conhecido ($X = 24$), a função passa a depender do valor do parâmetro desconhecido (μ):

$$\frac{\mathrm{e}^{-\mu}\mu^{24}}{24!} = f(\mu|x) = \mathcal{L}\{\mu|X = 24\}$$

Função de Verossimilhança: Poisson

Função de Verossimilhança: Poisson

A função de densidade se torna uma função de verossimilhança quando:

Função de Verossimilhança: Poisson

A função de densidade se torna uma função de verossimilhança quando:

O dado é fixo (resultado empírico);

Função de Verossimilhança: Poisson

A função de densidade se torna uma função de verossimilhança quando:

O dado é fixo (resultado empírico);

O valor de parâmetro é desconhecido (variável).

Função de Verossimilhança: Poisson

A função de densidade se torna uma função de verossimilhança quando:

O dado é fixo (resultado empírico);

O valor de parâmetro é desconhecido (variável).

Função de Verossimilhança: Poisson

A função de densidade se torna uma função de verossimilhança quando:

O dado é fixo (resultado empírico);

O valor de parâmetro é desconhecido (variável).

$$\mathcal{L}\{\mu|X=24\} = \frac{\mathrm{e}^{-\mu}\mu^{24}}{24!}$$

Função de Verossimilhança: Poisson

A função de densidade se torna uma função de verossimilhança quando:

O dado é fixo (resultado empírico);

O valor de parâmetro é desconhecido (variável).

$$\mathcal{L}\{\mu|X = 24\} = \frac{\mathrm{e}^{-\mu}\mu^{24}}{24!}$$

A Função de Verossimilhança $\mathcal{L}\{\mu|X = x\}$ é contínua.

Função de Verossimilhança: Poisson

Função de Verossimilhança

A função de densidade se torna uma função de verossimilhança quando:

O dado é fixo (resultado empírico);

O valor de parâmetro é desconhecido (variável).

Função de Verossimilhança da Distribuição Poisson:

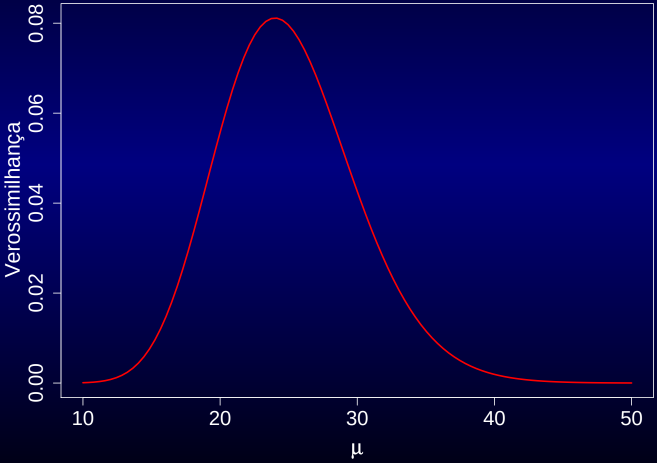
$$\mathcal{L}\{\mu|X=24\} = \frac{\mathrm{e}^{-\mu}\mu^{24}}{24!}$$

A Função de Verossimilhança $\mathcal{L}\{\mu|X=x\}$ é contínua.

A Função de densidade $f(x|\mu) = P(X=x|\mu)$ é discreta.

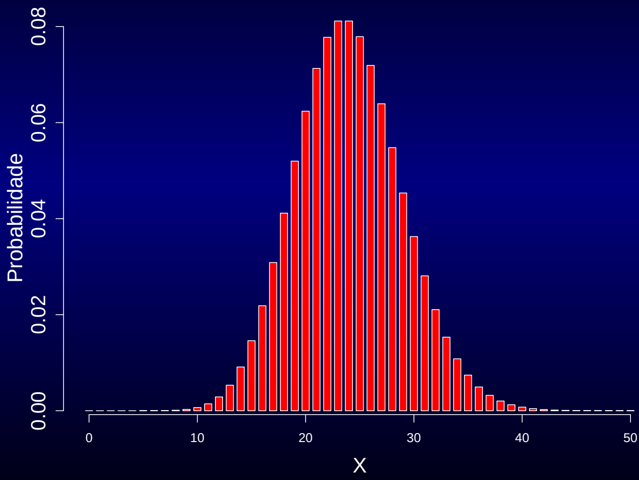
Função de Verossimilhança: Poisson

Função contínua: $\mathcal{L}\{\mu|X = 24\}$.



Função de Densidade: Poisson

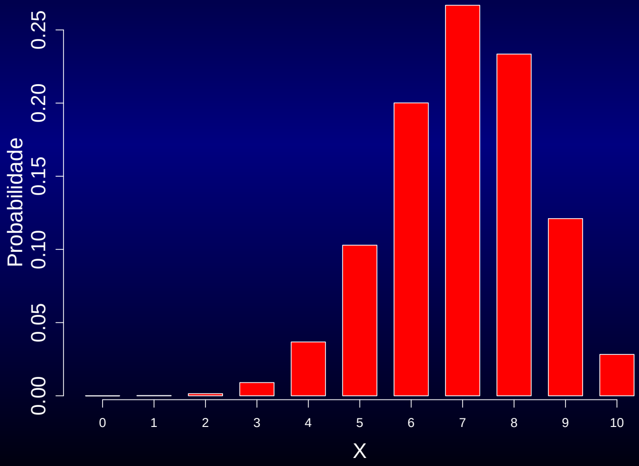
Função discreta: $f(x|\mu = 24) = P(X = x|\mu = 24)$.



Exemplo: Distribuição Binomial

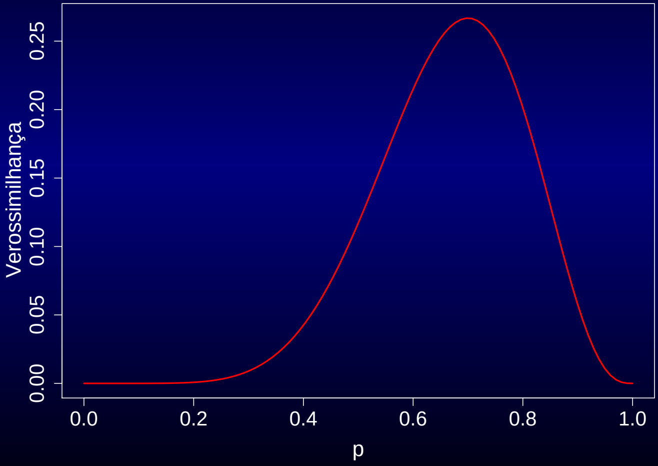
Função de densidade:

$f(x|n = 10, p = 0.7) = P(X = x|n = 10, p = 0.7).$



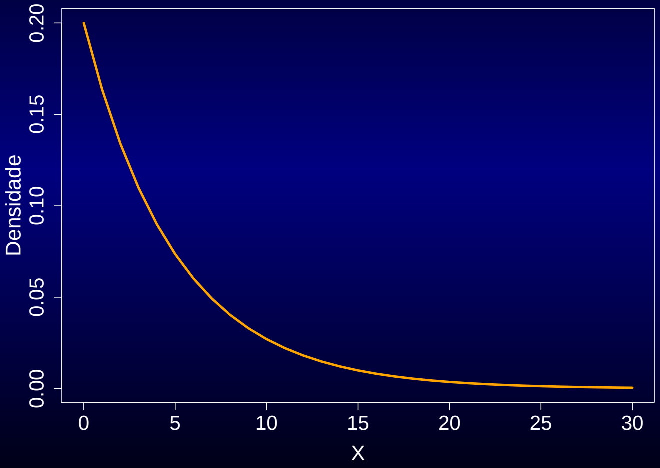
Exemplo: Distribuição Binomial

Função contínua: $\mathcal{L}\{p|n = 10, X = 7\}$.



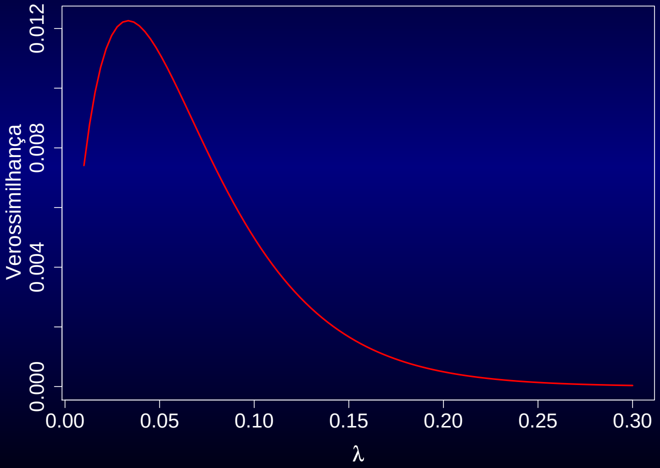
Exemplo: Distribuição Exponencial

Função de densidade (contínua): $f(x|\lambda = 0.2)$.



Exemplo: Distribuição Exponencial

Função contínua: $\mathcal{L}\{\lambda|X = 30\}$.



Princípio de Verossimilhança

Princípio de Verossimilhança

Hipóteses A e B

Uma observação $X = x$ favorece a hipótese $A : \theta = \theta_A$ contra a hipótese $B : \theta = \theta_B$.

Princípio de Verossimilhança

Hipóteses A e B: Uma observação $X = x$ favorece a hipótese $A : \theta = \theta_A$ contra a hipótese $B : \theta = \theta_B$.

Hipóteses C e D: Uma observação $Y = y$ favorece a hipótese $C : \beta = \beta_C$ contra a hipótese $D : \beta = \beta_D$.

Princípio de Verossimilhança

Uma observação $X = x$ favorece a hipótese $A : \theta = \theta_A$ contra a hipótese $B : \theta = \theta_B$.

Uma observação $Y = y$ favorece a hipótese $C : \beta = \beta_C$ contra a hipótese $D : \beta = \beta_D$.

Princípio de Verossimilhança

Uma observação $X = x$ favorece a hipótese $A : \theta = \theta_A$ contra a hipótese $B : \theta = \theta_B$.

Uma observação $Y = y$ favorece a hipótese $C : \beta = \beta_C$ contra a hipótese $D : \beta = \beta_D$.

Se:

$$\frac{\mathcal{L}\{\theta_A\}}{\mathcal{L}\{\theta_B\}} = \frac{\mathcal{L}\{\beta_C\}}{\mathcal{L}\{\beta_D\}}$$

Princípio de Verossimilhança

Uma observação $X = x$ favorece a hipótese $A : \theta = \theta_A$ contra a hipótese $B : \theta = \theta_B$.

Uma observação $Y = y$ favorece a hipótese $C : \beta = \beta_C$ contra a hipótese $D : \beta = \beta_D$.

Se:

$$\frac{\mathcal{L}\{\theta_A\}}{\mathcal{L}\{\theta_B\}} = \frac{\mathcal{L}\{\beta_C\}}{\mathcal{L}\{\beta_D\}}$$

Então a observação $X = x$ em favor de A vis-a-vis B e a observação $Y = y$ em favor de C vis-a-vis D são ***equivalentes em termos de evidência***.

Princípio de Verossimilhança

Conclusão

Princípio de Verossimilhança

A razão de verossimilhança é uma evidência relativa entre duas hipóteses.

Princípio de Verossimilhança

A razão de verossimilhança é uma <u>evidência relativa</u> entre duas hipóteses.

A força de evidência representada pela <u>magnitude</u> da razão de verossimilhança

Princípio de Verossimilhança

A razão de verossimilhança é uma evidência relativa entre duas hipóteses.

A força de evidência representada pela magnitude da razão de verossimilhança

é uma medida absoluta na comparação de hipóteses.

Princípio de Verossimilhança

Conclusão

A razão de verossimilhança é uma evidência relativa entre duas hipóteses.

A força de evidência representada pela magnitude da razão de verossimilhança

é uma medida absoluta na comparação de hipóteses.

Consequência

Princípio de Verossimilhança

Conclusão

A razão de verossimilhança é uma <u>evidência relativa</u> entre duas hipóteses.

A força de evidência representada pela <u>magnitude</u> da razão de verossimilhança

é uma <u>medida absoluta</u> na comparação de hipóteses.

Consequência

A *<u>evidência contida nos dados</u>* a respeito de qualquer hipótese

Princípio de Verossimilhança

Conclusão

A razão de verossimilhança é uma evidência relativa entre duas hipóteses.

A força de evidência representada pela magnitude da razão de verossimilhança

é uma medida absoluta na comparação de hipóteses.

Consequência

A *evidência contida nos dados* a respeito de qualquer hipótese

é *totalmente caracterizada* pela função de verossimilhança.

Princípio de Verossimilhança

Princípio de Verossimilhança

Foram observadas 24 plântulas ($X = 24$).

Princípio de Verossimilhança

Foram observadas 24 plântulas ($X = 24$).

O modelo assumido é a distribuição Poisson.

Princípio de Verossimilhança

Foram observadas 24 plântulas ($X = 24$).

O modelo assumido é a distribuição Poisson.

Toda evidência da observação a respeito do número médio de plântulas está contida na função de verossimilhança:

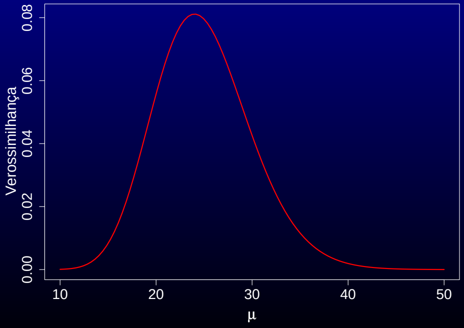
Princípio de Verossimilhança

Exemplo: Regeneração Natural

Foram observadas 24 plântulas $(X = 24)$.

O modelo assumido é a distribuição Poisson.

Toda evidência da observação a respeito do número médio de plântulas está contida na função de verossimilhança:



Princípio de Verossimilhança

Exemplo: Dois Laboratórios

Testar a toxidez de uma data substância química.

Princípio de Verossimilhança

Testar a toxidez de uma data substância química.

Princípio de Verossimilhança

Testar a toxidez de uma data substância química.

Dispunha de muitas cobaias.

Princípio de Verossimilhança

Testar a toxidez de uma data substância química.

Dispunha de muitas cobaias.

Selecionou 20 cobaias e aplicou a substância em concentração padrão.

Testar a toxidez de uma data substância química.

Dispunha de muitas cobaias.

Selecionou 20 cobaias e aplicou a substância em concentração padrão.

Resultado: 6 mortes.

Princípio de Verossimilhança

Exemplo: Dois Laboratórios

Testar a toxidez de uma data substância química.

Laboratório A

Dispunha de muitas cobaias.

Selecionou 20 cobaias e aplicou a substância em concentração padrão.

Resultado: 6 mortes.

Qual o Modelo Estatístico?

Princípio de Verossimilhança

Exemplo: Dois Laboratórios

Testar a toxidez de uma data substância química.

Laboratório A

Dispunha de muitas cobaias.

Selecionou 20 cobaias e aplicou a substância em concentração padrão.

Resultado: 6 mortes.

Qual o Modelo Estatístico?

A distribuição Binomial.

Princípio de Verossimilhança

Princípio de Verossimilhança

Laboratório B

Não dispunha de muitas cobaias.

Princípio de Verossimilhança

Laboratório B

Não dispunha de muitas cobaias.

Aplicou a substância em concentração padrão a cada cobaia disponível.

- Não dispunha de muitas cobaias.
- Aplicou a substância em concentração padrão a cada cobaia disponível.
- Decidiu-se que o experimento terminaria com o 6^a morte.

Princípio de Verossimilhança

Laboratório B

Não dispunha de muitas cobaias.

Aplicou a substância em concentração padrão a cada cobaia disponível.

Decidiu-se que o experimento terminaria com o 6^a morte.

Resultado: 20 cobaias receberam a substância.

Princípio de Verossimilhança

Laboratório B

Não dispunha de muitas cobaias.

Aplicou a substância em concentração padrão a cada cobaia disponível.

Decidiu-se que o experimento terminaria com o 6^a morte.

Resultado: 20 cobaias receberam a substância.

Qual o Modelo Estatístico?

Laboratório B

Não dispunha de muitas cobaias.

Aplicou a substância em concentração padrão a cada cobaia disponível.

Decidiu-se que o experimento terminaria com o 6^a morte.

Resultado: 20 cobaias receberam a substância.

Qual o Modelo Estatístico?

A distribuição Binomial Negativa.

Princípio de Verossimilhança

Princípio de Verossimilhança

Laboratório A: 6 mortes em 20 cobaias.

Princípio de Verossimilhança

Laboratório A: 6 mortes em 20 cobaias.

Laboratório B: 6 mortes em 20 cobaias.

Princípio de Verossimilhança

Laboratório A: 6 mortes em 20 cobaias.

Laboratório B: 6 mortes em 20 cobaias.

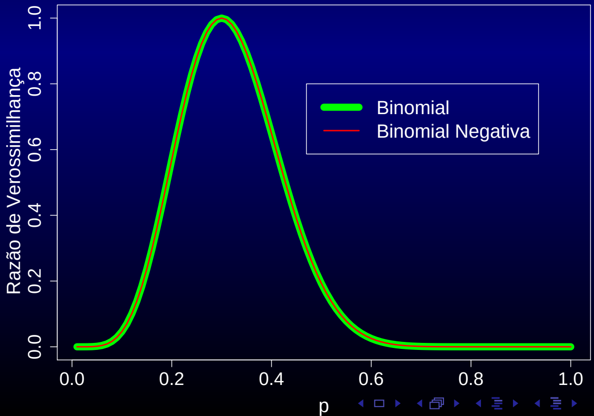
Exemplo: Dois Laboratórios

As Evidências são Diferentes?

Princípio de Verossimilhança

Laboratório A: 6 mortes em 20 cobaias.

Laboratório B: 6 mortes em 20 cobaias.



Múltiplas Observações Independentes

Múltiplas Observações Independentes

Dados: Os dados são uma amotra com n observações independentes:

$$X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

Múltiplas Observações Independentes

Dados: Os dados são uma amotra com n observações independentes:

$$X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

Probabilidade A probabilidade da amostra pelo modelo A:

$$P(X_n|A)=P(X=x_1|A)\cdot P(X=x_2|A)\cdot\ldots\cdot P(X=x_n|A)$$

Múltiplas Observações Independentes

Dados:

Os dados são uma amotra com n observações independentes:

$$X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

Probabilidade

A probabilidade da amostra pelo modelo A:

$$P(X_n|A) = P(X=x_1|A) \cdot P(X=x_2|A) \cdot \ldots \cdot P(X=x_n|A)$$

Verossimilhança

Múltiplas Observações Independentes

Dados:

Os dados são uma amotra com n observações independentes:

$$X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

Probabilidade

A probabilidade da amostra pelo modelo A:

$$P(X_n|A)=P(X=x_1|A)\cdot P(X=x_2|A)\cdot\ldots\cdot P(X=x_n|A)$$

Verossimilhança

Verossimilhança da amostra é o produtório da verossimilhança das observações:

$$\mathcal{L}\{A|X_n\}=\mathcal{L}\{A|X=x_1\}\cdot\mathcal{L}\{A|X=x_2\}\cdot\ldots\cdot\mathcal{L}\{A|X=x_n\}$$

Múltiplas Observações Independentes

Dados:

Os dados são uma amostra com n observações independentes:

$$X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Probabilidade

A probabilidade da amostra pelo modelo A:

$$P(X_n|A) = P(X=x_1|A) \cdot P(X=x_2|A) \cdot \ldots \cdot P(X=x_n|A)$$

Verossimilhança

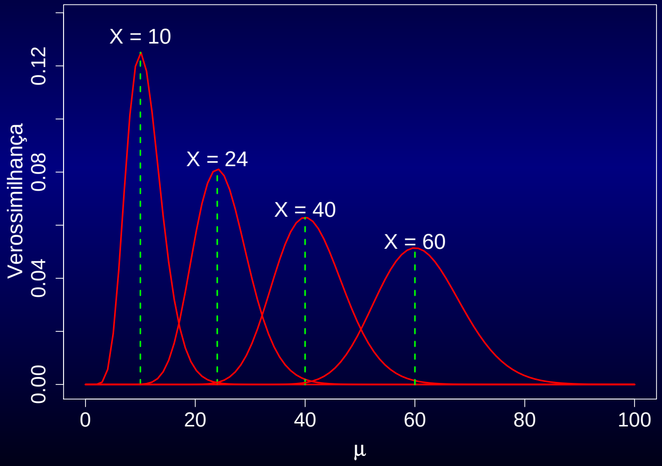
Verossimilhança da amostra é o produtório da verossimilhança das observações:

$$\mathcal{L}\{A|X_n\} = \mathcal{L}\{A|X=x_1\} \cdot \mathcal{L}\{A|X=x_2\} \cdot \ldots \cdot \mathcal{L}\{A|X=x_n\}$$

$$\mathcal{L}\{A|X_n\} = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{L}\{A|X = x_i\}$$

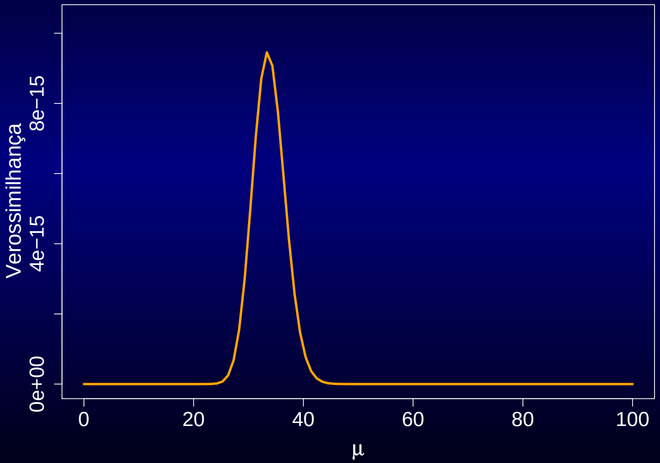
Múltiplas Observações Independentes

Verossimilhança das observações individuais:



Múltiplas Observações Independentes

Verossimilhança da amostra:



Valor Numérico da Verossimilhança da Amostra

Valores da Verossimilhança para as parcelas e amostra:

Parcela	No. Plântulas	Hipóteses $\mu = 16$	$\mu = 35$
1	10	3.409770×10^{-02}	4.793034×10^{-07}
2	24	1.437018×10^{-02}	1.160434×10^{-02}
3	40	2.015777×10^{-07}	4.474761×10^{-02}
4	60	2.389530×10^{-17}	3.338881×10^{-05}
Amostra	—	2.360164×10^{-27}	8.310016×10^{-15}

Função de Log-Verossimilhança Negativa

Função de Log-Verossimilhança Negativa

Função de Log-Verossimilhança Negativa

Observações: valores positivos pequenos (em geral $0 < \mathcal{L} < 1$).

Função de Log-Verossimilhança Negativa

Observações: valores positivos pequenos (em geral $0 < \mathcal{L} < 1$).

Amostra: produto $\longrightarrow 0$ quando n cresce.

Função de Log-Verossimilhança Negativa

Observações: valores positivos pequenos (em geral $0 < \mathcal{L} < 1$).

Amostra: produto $\longrightarrow 0$ quando n cresce.

Função de Log-Verossimilhança Negativa

Função de Verossimilhança

Observações: valores positivos pequenos (em geral $0 < \mathcal{L} < 1$).

Amostra: produto $\longrightarrow 0$ quando n cresce.

Transformação log:

resulta em valores razoáveis, mas negativos: $\ln(\mathcal{L})$.

Função de Log-Verossimilhança Negativa

Função de Verossimilhança

Observações: valores positivos pequenos (em geral $0 < \mathcal{L} < 1$).

Amostra: produto $\longrightarrow 0$ quando n cresce.

Transformação

log: resulta em valores razoáveis, mas negativos: $\ln(\mathcal{L})$.

sinal: resulta em valores positivos: $-\ln(\mathcal{L})$.

Função de Log-Verossimilhança Negativa

Função de Verossimilhança

Observações: valores positivos pequenos (em geral $0 < \mathcal{L} < 1$).

Amostra: produto $\longrightarrow 0$ quando n cresce.

Transformação

log: resulta em valores razoáveis, mas negativos: $\ln(\mathcal{L})$.

sinal: resulta em valores positivos: $-\ln(\mathcal{L})$.

nova função: *Log-Verossimilhança Negativa*: $\mathbf{L} = -\ln(\mathcal{L})$.

Função de Log-Verossimilhança Negativa

Função de Log-Verossimilhança Negativa

Observação:

Função de Log-Verossimilhança Negativa

Observação:

$$\mathbf{L}\{A|X = x_1\} = -\ln\left(\mathcal{L}\{A|X = x_1\}\right)$$

Função de Log-Verossimilhança Negativa

Observação:

$$\mathbf{L}\{A|X = x_1\} = -\ln\left(\mathcal{L}\{A|X = x_1\}\right)$$
$$\mathbf{L}\{A|X = x_2\} = -\ln\left(\mathcal{L}\{A|X = x_2\}\right)$$

Função de Log-Verossimilhança Negativa

Observação:

$$\mathbf{L}\{A|X = x_1\} = -\ln\left(\mathcal{L}\{A|X = x_1\}\right)$$
$$\mathbf{L}\{A|X = x_2\} = -\ln\left(\mathcal{L}\{A|X = x_2\}\right)$$
$$\ldots$$

Função de Log-Verossimilhança Negativa

Observação:

$$\mathbf{L}\{A|X = x_1\} = -\ln\left(\mathcal{L}\{A|X = x_1\}\right)$$
$$\mathbf{L}\{A|X = x_2\} = -\ln\left(\mathcal{L}\{A|X = x_2\}\right)$$
$$\ldots$$
$$\mathbf{L}\{A|X = x_n\} = -\ln\left(\mathcal{L}\{A|X = x_n\}\right)$$

Função de Log-Verossimilhança Negativa

Observação:

$$\mathbf{L}\{A|X = x_1\} = -\ln\left(\mathcal{L}\{A|X = x_1\}\right)$$
$$\mathbf{L}\{A|X = x_2\} = -\ln\left(\mathcal{L}\{A|X = x_2\}\right)$$
$$\dots$$
$$\mathbf{L}\{A|X = x_n\} = -\ln\left(\mathcal{L}\{A|X = x_n\}\right)$$

Amostra:

Função de Log-Verossimilhança Negativa

Observação:

$$\mathbf{L}\{A|X = x_1\} = -\ln\left(\mathcal{L}\{A|X = x_1\}\right)$$
$$\mathbf{L}\{A|X = x_2\} = -\ln\left(\mathcal{L}\{A|X = x_2\}\right)$$
$$\ldots$$
$$\mathbf{L}\{A|X = x_n\} = -\ln\left(\mathcal{L}\{A|X = x_n\}\right)$$

Amostra:

$$\mathbf{L}\{A|X_n\} = -\ln\left[\mathcal{L}\{A|X_n\}\right]$$

Função de Log-Verossimilhança Negativa

Observação:

$$\mathbf{L}\{A|X = x_1\} = -\ln\left(\mathcal{L}\{A|X = x_1\}\right)$$
$$\mathbf{L}\{A|X = x_2\} = -\ln\left(\mathcal{L}\{A|X = x_2\}\right)$$
$$\dots$$
$$\mathbf{L}\{A|X = x_n\} = -\ln\left(\mathcal{L}\{A|X = x_n\}\right)$$

Amostra:

$$\mathbf{L}\{A|X_n\} = -\ln\left[\mathcal{L}\{A|X_n\}\right]$$
$$\mathbf{L}\{A|X_n\} = -\ln\left[\prod_{i=1}^{n} \mathcal{L}\{A|X = x_i\}\right]$$

Função de Log-Verossimilhança Negativa

Observação:

$$\mathbf{L}\{A|X=x_1\} = -\ln\left(\mathcal{L}\{A|X=x_1\}\right)$$
$$\mathbf{L}\{A|X=x_2\} = -\ln\left(\mathcal{L}\{A|X=x_2\}\right)$$
$$\ldots$$
$$\mathbf{L}\{A|X=x_n\} = -\ln\left(\mathcal{L}\{A|X=x_n\}\right)$$

Amostra:

$$\mathbf{L}\{A|X_n\} = -\ln\left[\mathcal{L}\{A|X_n\}\right]$$
$$\mathbf{L}\{A|X_n\} = -\ln\left[\prod_{i=1}^{n}\mathcal{L}\{A|X=x_i\}\right]$$
$$\mathbf{L}\{A|X_n\} = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{L}\{A|X=x_i\}$$

Função de Log-Verossimilhança Negativa

Função de Log-Verossimilhança Negativa

Valores numéricos mais convenientes

Parcela	No. Plântulas	Hipóteses $\mu = 16$	$\mu = 35$
1	10	3.378525	14.550932
2	24	4.242600	4.456376
3	40	15.417091	3.106717
4	60	38.272850	10.307290
Amostra:	—	61.311066	32.421315

Função de Log-Verossimilhança Negativa

Conveniência Algébrica: Exemplo da Dist. Poisson

Função de Log-Verossimilhança Negativa

Verossimilhança:

Conveniência Algébrica: Exemplo da Dist. Poisson

Função de Log-Verossimilhança Negativa

Verossimilhança:

Conveniência Algébrica: Exemplo da Dist. Poisson

$$\mathcal{L}\{A|X_n\} = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{L}\{A|X = x_i\}$$

Função de Log-Verossimilhança Negativa

Verossimilhança:

Conveniência Algébrica: Exemplo da Dist. Poisson

$\mathcal{L}\{A|X_n\} = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{L}\{A|X = x_i\}$

$\mathcal{L}\{A|X_n\} = \prod_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{-\mu}\mu^{x_i}}{x_i!}$

Função de Log-Verossimilhança Negativa

Verossimilhança:

Conveniência Algébrica: Exemplo da Dist. Poisson

$$\mathcal{L}\{A|X_n\} = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{L}\{A|X = x_i\}$$

$$\mathcal{L}\{A|X_n\} = \prod_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{-\mu}\mu^{x_i}}{x_i!}$$

$$\mathcal{L}\{A|X_n\} = \left(\mathrm{e}^{-\mu}\right)^n \prod_{i=1}^{n} \frac{\mu^{x_i}}{x_i!}$$

Função de Log-Verossimilhança Negativa

Verossimilhança:

Conveniência Algébrica: Exemplo da Dist. Poisson

$$\mathcal{L}\{A|X_n\} = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{L}\{A|X = x_i\}$$
$$\mathcal{L}\{A|X_n\} = \prod_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{-\mu}\mu^{x_i}}{x_i!}$$
$$\mathcal{L}\{A|X_n\} = (\mathrm{e}^{-\mu})^n \prod_{i=1}^{n} \frac{\mu^{x_i}}{x_i!}$$

Log-Verossimilhança Negativa:

Função de Log-Verossimilhança Negativa

Conveniência Algébrica: Exemplo da Dist. Poisson

Verossimilhança:

$$\mathcal{L}\{A|X_n\} = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{L}\{A|X = x_i\}$$

$$\mathcal{L}\{A|X_n\} = \prod_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{-\mu}\mu^{x_i}}{x_i!}$$

$$\mathcal{L}\{A|X_n\} = (\mathrm{e}^{-\mu})^n \prod_{i=1}^{n} \frac{\mu^{x_i}}{x_i!}$$

Log-Verossimilhança Negativa:

$$\mathbf{L}\{A|X_n\} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{L}\{A|X = x_i\}$$

Função de Log-Verossimilhança Negativa

Conveniência Algébrica: Exemplo da Dist. Poisson

Verossimilhança:

$$\mathcal{L}\{A|X_n\} = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{L}\{A|X = x_i\}$$

$$\mathcal{L}\{A|X_n\} = \prod_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{-\mu}\mu^{x_i}}{x_i!}$$

$$\mathcal{L}\{A|X_n\} = (\mathrm{e}^{-\mu})^n \prod_{i=1}^{n} \frac{\mu^{x_i}}{x_i!}$$

Log-Verossimilhança Negativa:

$$\mathbf{L}\{A|X_n\} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{L}\{A|X = x_i\}$$

$$\mathbf{L}\{A|X_n\} = \sum_{i=1}^{n} -\ln\left[\frac{\mathrm{e}^{-\mu}\mu^{x_i}}{x_i!}\right]$$

Função de Log-Verossimilhança Negativa

Conveniência Algébrica: Exemplo da Dist. Poisson

Verossimilhança:

$$\mathcal{L}\{A|X_n\} = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{L}\{A|X = x_i\}$$

$$\mathcal{L}\{A|X_n\} = \prod_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{-\mu}\mu^{x_i}}{x_i!}$$

$$\mathcal{L}\{A|X_n\} = (\mathrm{e}^{-\mu})^n \prod_{i=1}^{n} \frac{\mu^{x_i}}{x_i!}$$

Log-Verossimilhança Negativa:

$$\mathbf{L}\{A|X_n\} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{L}\{A|X = x_i\}$$

$$\mathbf{L}\{A|X_n\} = \sum_{i=1}^{n} -\ln\left[\frac{\mathrm{e}^{-\mu}\mu^{x_i}}{x_i!}\right]$$

$$\mathbf{L}\{A|X_n\} = \sum_{i=1}^{n} [\mu - x_i \ln(\mu) + \ln(x_i!)]$$

Função de Log-Verossimilhança Negativa

Conveniência Algébrica: Exemplo da Dist. Poisson

Verossimilhança:

$$\mathcal{L}\{A|X_n\} = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{L}\{A|X = x_i\}$$

$$\mathcal{L}\{A|X_n\} = \prod_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{-\mu}\mu^{x_i}}{x_i!}$$

$$\mathcal{L}\{A|X_n\} = \left(\mathrm{e}^{-\mu}\right)^n \prod_{i=1}^{n} \frac{\mu^{x_i}}{x_i!}$$

Log-Verossimilhança Negativa:

$$\mathbf{L}\{A|X_n\} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{L}\{A|X = x_i\}$$

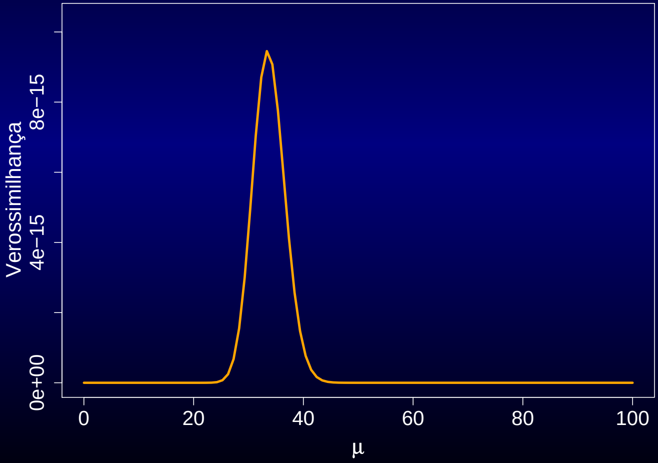
$$\mathbf{L}\{A|X_n\} = \sum_{i=1}^{n} -\ln\left[\frac{\mathrm{e}^{-\mu}\mu^{x_i}}{x_i!}\right]$$

$$\mathbf{L}\{A|X_n\} = \sum_{i=1}^{n} \left[\mu - x_i \ln(\mu) + \ln(x_i!)\right]$$

$$\mathbf{L}\{A|X_n\} = n\ \mu - \ln(\mu) \sum_{i=1}^{n} x_i + n\ \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$$

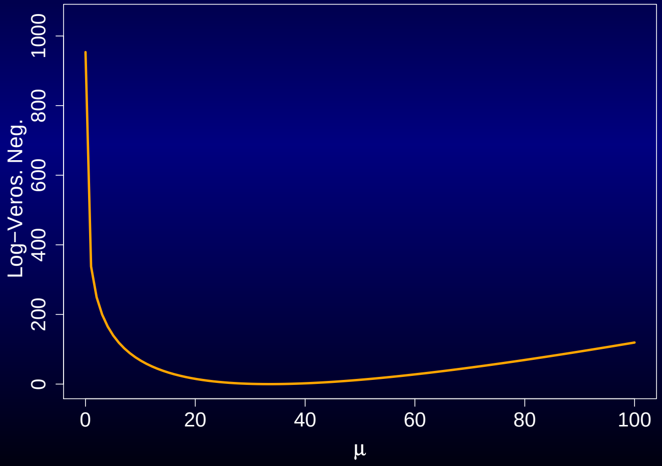
Função de Log-Verossimilhança Negativa

Curva da Função de Verossimilhança



Função de Log-Verossimilhança Negativa

Curva da Função de Log-Verossimilhança Negativa



Método da Máxima Verossimilhança

Método da Máxima Verossimilhança

Método da Máxima Verossimilhança

É um método de estimação de parâmetros.

Método da Máxima Verossimilhança

É um método de estimação de parâmetros.

É utilizado como *técnica* por todas as **"tribos"** de estatísticos.

Método da Máxima Verossimilhança

É um método de estimação de parâmetros.

É utilizado como *técnica* por todas as **"tribos"** de estatísticos.

Método da Máxima Verossimilhança

É um método de estimação de parâmetros.

É utilizado como *técnica* por todas as **"tribos"** de estatísticos.

Maximizar a função de verossimilhança.

Método da Máxima Verossimilhança

É um método de estimação de parâmetros.

É utilizado como *técnica* por todas as **"tribos"** de estatísticos.

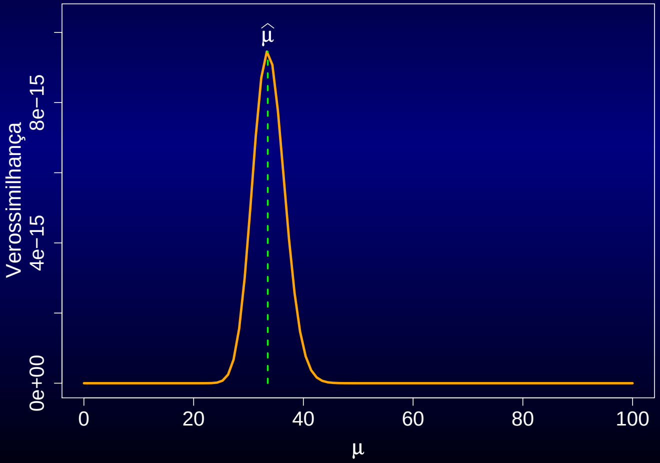
Maximizar a função de verossimilhança.

Minimizar a função de log-verossimilhança negativa.

Método da Máxima Verossimilhança

Solução Gráfica: Exemplo Dist. Poisson

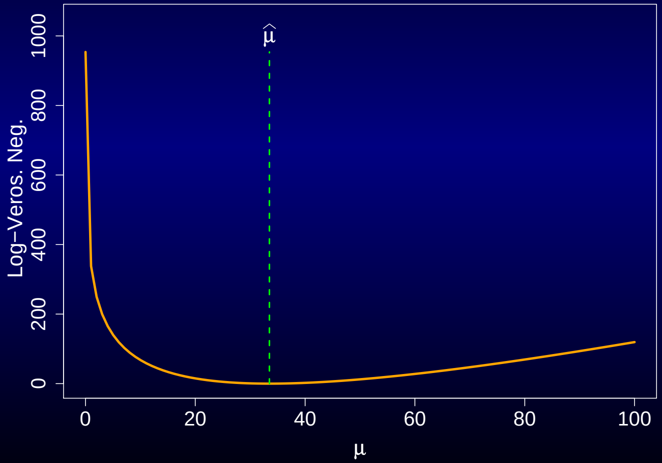
Função de Verossimilhança



Método da Máxima Verossimilhança

Solução Gráfica: Exemplo Dist. Poisson

Função de Log-Verossimilhança Negativa



Método da Máxima Verossimilhança

Solução Algébrica: Exemplo Dist. Poisson

Função $\mathbf{L}\{A|X_n\} = n\ \mu - \ln(\mu)\sum_{i=1}^{n} x_i + n\ \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$

Método da Máxima Verossimilhança

Solução Algébrica: Exemplo Dist. Poisson

Função $\mathbf{L}\{A|X_n\} = n\ \mu - \ln(\mu) \sum_{i=1}^{n} x_i + n\ \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$

Ponto de Mínimo

$$\delta \mathbf{L}\{A|X_n\}/\delta\mu = 0$$

Método da Máxima Verossimilhança

Solução Algébrica: Exemplo Dist. Poisson

Função

$$\mathbf{L}\{A|X_n\} = n\ \mu - \ln(\mu)\sum_{i=1}^{n} x_i + n\ \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$$

Ponto de Mínimo

$$\delta\mathbf{L}\{A|X_n\}/\delta\mu = 0$$

Solução

$$\begin{aligned} n - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\mu} &= 0 \\ \widehat{\mu} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \end{aligned}$$

Estimadores de Máxima Verossimilhança.

Estimadores Estimadores de Máxima Verossimilhança.

Sigla MLE = *Maximum Likelihood Estimators*.

Método da Máxima Verossimilhança

Estimadores: MLE

Estimadores	Estimadores de Máxima Verossimilhança.
Sigla	MLE = *Maximum Likelihood Estimators*.
Exemplo Poisson	

Estimadores	Estimadores de Máxima Verossimilhança.
Sigla	MLE = *Maximum Likelihood Estimators*.
Exemplo Poisson	O estimador $\widehat{\mu}$ é a média amostral.

Estimadores	Estimadores de Máxima Verossimilhança.
Sigla	MLE = *Maximum Likelihood Estimators*.
Exemplo Poisson	O estimador $\widehat{\mu}$ é a média amostral. A média amostral é o *MLE* do parâmetro μ da dist. Poisson.

Para grandes amostras ($n \to \infty$) os MLE têm:

Método da Máxima Verossimilhança

Propriedades dos MLE

Para grandes amostras ($n \to \infty$) os MLE têm:

Para grandes amostras ($n \longrightarrow \infty$) os MLE têm:

Consistência:

MLE *convergem em probabilidade* para o valor do parâmetro.

Para grandes amostras ($n \to \infty$) os MLE têm:

Consistência:

MLE *convergem em probabilidade* para o valor do parâmetro.

Isto é, os MLE são *não-viciados*.

Para grandes amostras ($n \longrightarrow \infty$) os MLE têm:

Consistência:

MLE *convergem em probabilidade* para o valor do parâmetro.

Isto é, os MLE são *não-viciados*.

Eficiência Assimptótica

Para grandes amostras ($n \longrightarrow \infty$) os MLE têm:

Consistência:

MLE *convergem em probabilidade* para o valor do parâmetro.

Isto é, os MLE são *não-viciados*.

Eficiência Assimptótica

Os MLE atingem a *menor* variância dentre os estimadores não-viciados.

Para grandes amostras ($n \to \infty$) os MLE têm:

Consistência:

MLE *convergem em probabilidade* para o valor do parâmetro.

Isto é, os MLE são *não-viciados*.

Eficiência Assimptótica

Os MLE atingem a *menor* variância dentre os estimadores não-viciados.

Normalidade Assimptótica

Para grandes amostras ($n \to \infty$) os MLE têm:

Consistência:

MLE *convergem em probabilidade* para o valor do parâmetro.

Isto é, os MLE são *não-viciados*.

Eficiência Assimptótica

Os MLE atingem a *menor* variância dentre os estimadores não-viciados.

Normalidade Assimptótica

Os MLE têm distribuição Gaussiana.

Independentemente do tamanho da amostra, os MLE possuem:

Independentemente do tamanho da amostra, os MLE possuem:

Invariância

Independentemente do tamanho da amostra, os MLE possuem:

Invariância

Transformações monotônicas de MLE resultam em MLE.

Independentemente do tamanho da amostra, os MLE possuem:

Invariância

Transformações monotônicas de MLE resultam em MLE.

Exemplos de Transformações Monotônicas

Independentemente do tamanho da amostra, os MLE possuem:

Invariância

Transformações monotônicas de MLE resultam em MLE.

Exemplos de Transformações Monotônicas

Transformação linear: $a + b\,\widehat{\mu}$.

Invariância

Independentemente do tamanho da amostra, os MLE possuem:

Transformações monotônicas de MLE resultam em MLE.

Exemplos de Transformações Monotônicas

Transformação linear: $a + b\ \widehat{\mu}$.

Raiz quadrada: $\sqrt{\widehat{\mu}}$.

Independentemente do tamanho da amostra, os MLE possuem:

Invariância

Transformações monotônicas de MLE resultam em MLE.

Exemplos de Transformações Monotônicas

Transformação linear: $a + b\,\widehat{\mu}$.
Raiz quadrada: $\sqrt{\widehat{\mu}}$.
Logaritmo: $\log(\widehat{\mu})$.

Independentemente do tamanho da amostra, os MLE possuem:

Invariância

Transformações monotônicas de MLE resultam em MLE.

Exemplos de Transformações Monotônicas

Transformação linear: $a + b\ \widehat{\mu}$.

Raiz quadrada: $\sqrt{\widehat{\mu}}$.

Logaritmo: $\log(\widehat{\mu})$.

Exponencial: $\mathrm{e}^{\widehat{\mu}}$.

Intervalos de Verossimilhança

Regra Canônica

Questão

Mas quando decidir que uma razão de verossimilhança indica estimativas com ***plausibilidade*** diferente?

Questão

Mas quando decidir que uma razão de verossimilhança indica estimativas com ***plausibilidade*** diferente?

Regra Canônica

Mas quando decidir que uma razão de verossimilhança indica estimativas com ***plausibilidade*** diferente?

Decisão arbitrária: requer convenção!

Mas quando decidir que uma razão de verossimilhança indica estimativas com ***plausibilidade*** diferente?

Decisão arbitrária: requer convenção!

Convenção aceita: razões maiores que 8

Questão

Mas quando decidir que uma razão de verossimilhança indica estimativas com ***plausibilidade*** diferente?

Regra Canônica

Decisão arbitrária: requer convenção!

Convenção aceita: razões maiores que 8

indicam diferenças relevantes em ***plausibilidade***.

Intervalos de Verossimilhança

Regra Canônica

Mas quando decidir que uma razão de verossimilhança indica estimativas com ***plausibilidade*** diferente?

Decisão arbitrária: requer convenção!

Convenção aceita: razões maiores que 8

indicam diferenças relevantes em ***plausibilidade***.

$$\frac{\mathcal{L}\{\widehat{\mu}|\mathbf{X}_n\}}{\mathcal{L}\{\mu|\mathbf{X}_n\}} \geq 8$$

Intervalos de Verossimilhança

Intervalo pela Razão de Verossimilhança

Intervalos de Verossimilhança

Intervalo pela Razão de Verossimilhança

Os valores do parâmetro ***na vizinhaça*** da MLE ($\widehat{\mu}$)

Os valores do parâmetro ***na vizinhaça*** da MLE ($\widehat{\mu}$) cuja razão de verossimilhança for menor ou igual a 8

Os valores do parâmetro ***na vizinhaça*** da MLE ($\widehat{\mu}$) cuja razão de verossimilhança for menor ou igual a 8 terão igual plausibilidade.

Os valores do parâmetro ***na vizinhaça*** da MLE ($\widehat{\mu}$) cuja razão de verossimilhança for menor ou igual a 8 terão igual plausibilidade.

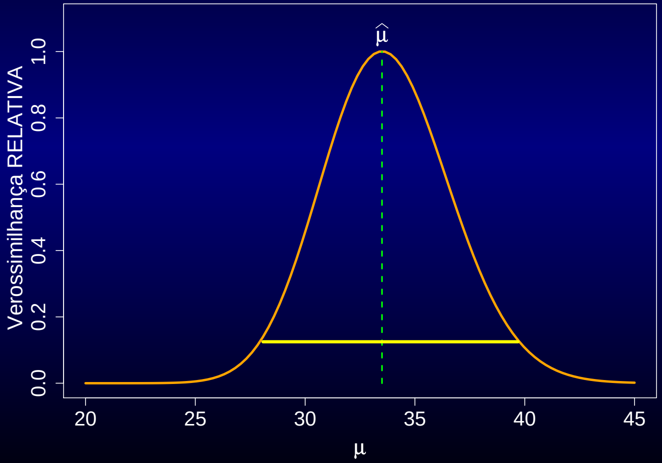
$$\frac{\mathcal{L}\{\widehat{\mu}|\mathbf{X}_n\}}{\mathcal{L}\{\mu|\mathbf{X}_n\}} \geq 8 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathcal{L}\{\mu|\mathbf{X}_n\}}{\mathcal{L}\{\widehat{\mu}|\mathbf{X}_n\}} \geq \frac{1}{8}$$

Os valores do parâmetro ***na vizinhaça*** da MLE ($\widehat{\mu}$) cuja razão de verossimilhança for menor ou igual a 8 terão igual plausibilidade.

$$\frac{\mathcal{L}\{\widehat{\mu}|\mathbf{X}_n\}}{\mathcal{L}\{\mu|\mathbf{X}_n\}} \geq 8 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathcal{L}\{\mu|\mathbf{X}_n\}}{\mathcal{L}\{\widehat{\mu}|\mathbf{X}_n\}} \geq \frac{1}{8}$$

$$\text{Verossimilhança RELATIVA} \Rightarrow \frac{\mathcal{L}\{\mu|\mathbf{X}_n\}}{\mathcal{L}\{\widehat{\mu}|\mathbf{X}_n\}} \leq 1$$

Verossimilhança Relativa



Intervalos de Verossimilhança

Intervalo pela Diferença da Log-Verossimilhança Negativa

Intervalos de Verossimilhança

Intervalo pela Diferença da Log-Verossimilhança Negativa

Razão

$$\frac{\mathcal{L}\{\widehat{\mu}|\mathbf{X}_n\}}{\mathcal{L}\{\mu|\mathbf{X}_n\}} \geq 8 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathcal{L}\{\mu|\mathbf{X}_n\}}{\mathcal{L}\{\widehat{\mu}|\mathbf{X}_n\}} \geq \frac{1}{8}$$

Intervalos de Verossimilhança

Intervalo pela Diferença da Log-Verossimilhança Negativa

$$\frac{\mathcal{L}\{\widehat{\mu}|\mathbf{X}_n\}}{\mathcal{L}\{\mu|\mathbf{X}_n\}} \geq 8 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathcal{L}\{\mu|\mathbf{X}_n\}}{\mathcal{L}\{\widehat{\mu}|\mathbf{X}_n\}} \geq \frac{1}{8}$$

Intervalos de Verossimilhança

Intervalo pela Diferença da Log-Verossimilhança Negativa

$$\frac{\mathcal{L}\{\widehat{\mu}|\mathbf{X}_n\}}{\mathcal{L}\{\mu|\mathbf{X}_n\}} \geq 8 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathcal{L}\{\mu|\mathbf{X}_n\}}{\mathcal{L}\{\widehat{\mu}|\mathbf{X}_n\}} \geq \frac{1}{8}$$

$$-\ln\left[\frac{\mathcal{L}\{\mu|\mathbf{X}_n\}}{\mathcal{L}\{\widehat{\mu}|\mathbf{X}_n\}}\right] \leq -\ln\left(\frac{1}{8}\right)$$

Intervalos de Verossimilhança

Intervalo pela Diferença da Log-Verossimilhança Negativa

Razão

$$\frac{\mathcal{L}\{\widehat{\mu}|\mathbf{X}_n\}}{\mathcal{L}\{\mu|\mathbf{X}_n\}} \geq 8 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathcal{L}\{\mu|\mathbf{X}_n\}}{\mathcal{L}\{\widehat{\mu}|\mathbf{X}_n\}} \geq \frac{1}{8}$$

Diferença

$$-\ln\left[\frac{\mathcal{L}\{\mu|\mathbf{X}_n\}}{\mathcal{L}\{\widehat{\mu}|\mathbf{X}_n\}}\right] \leq -\ln\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$\mathbf{L}\{\mu|\mathbf{X}_n\} - \mathbf{L}\{\widehat{\mu}|\mathbf{X}_n\} \leq \ln(8) = 2,0794$$

Intervalos de Verossimilhança

Intervalo pela Diferença da Log-Verossimilhança Negativa

Razão

$$\frac{\mathcal{L}\{\widehat{\mu}|\mathbf{X}_n\}}{\mathcal{L}\{\mu|\mathbf{X}_n\}} \geq 8 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathcal{L}\{\mu|\mathbf{X}_n\}}{\mathcal{L}\{\widehat{\mu}|\mathbf{X}_n\}} \geq \frac{1}{8}$$

Diferença

$$-\ln\left[\frac{\mathcal{L}\{\mu|\mathbf{X}_n\}}{\mathcal{L}\{\widehat{\mu}|\mathbf{X}_n\}}\right] \leq -\ln\left(\frac{1}{8}\right)$$

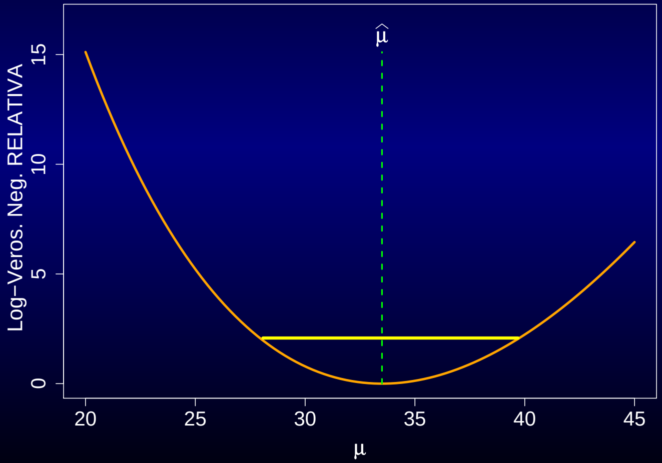
$$\mathbf{L}\{\mu|\mathbf{X}_n\} - \mathbf{L}\{\widehat{\mu}|\mathbf{X}_n\} \leq \ln(8) = 2,0794$$

$$\overset{\text{Log-Verossimilhança Negativa}}{\text{RELATIVA}} \Rightarrow \mathbf{L}\{\mu|\mathbf{X}_n\} - \mathbf{L}\{\widehat{\mu}|\mathbf{X}_n\} \geq 0$$

Intervalos de Verossimilhança

Intervalo pela Diferença da Log-Verossimilhança Negativa

Log-Verossimilhança Negativa Relativa



Superfície de Verossimilhança

Região de Verossimilhança

Superfície de Verossimilhança

Região de Verossimilhança

Superfície de Verossimilhança

Região de Verossimilhança

Como fazer quando se têm mais de um parâmetro?

Mais de 1 Parâmetros

Como fazer quando se têm mais de um parâmetro?

A função de verossimilhança formará uma *superfície*.

Como fazer quando se têm mais de um parâmetro?

A função de verossimilhança formará uma *superfície*.

Será definido então uma *região de verossimilhança*.

Mais de 1 Parâmetros

Como fazer quando se têm mais de um parâmetro?

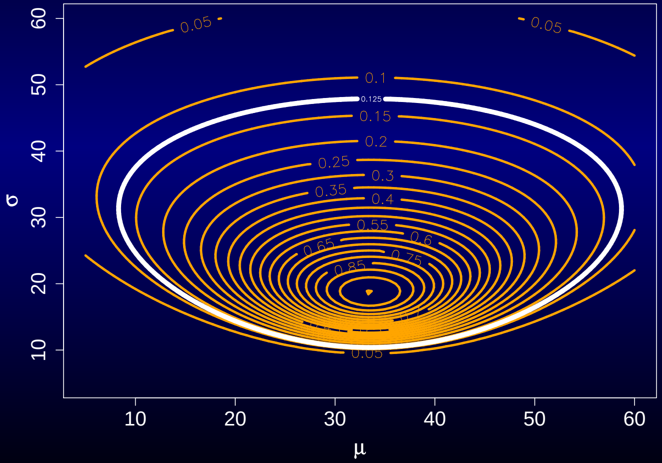
A função de verossimilhança formará uma *superfície*.

Será definido então uma *região de verossimilhança*.

Exemplo: Distribuição Gaussiana

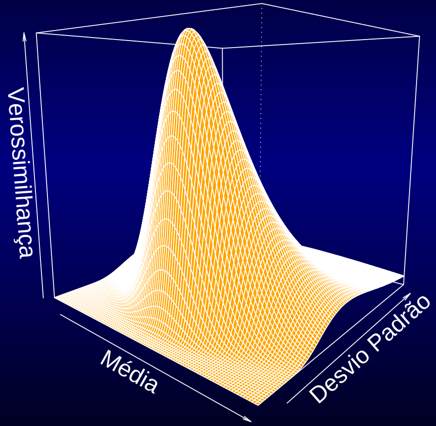
Distr. Gaussiana têm dois parâmetros: μ e σ.

Gráfico de Contorno da Verossimilhança Relativa



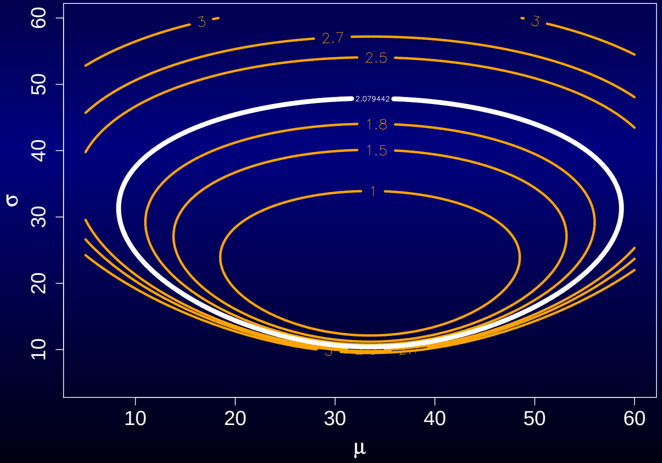
Superfície de Verossimilhança

Gráfico de Superfície da Verossimilhança Relativa



Log-Verossimilhança Negativa

Gráfico de Contorno da Log-Verossimilhança Negativa Relativa



Modelos com Muitos Parâmetros

Evitando a Superfície de Verossimilhança

Modelos com Muitos Parâmetros

Evitando a Superfície de Verossimilhança

Parâmetros

De interesse.

De interesse.

Sem interesse.

Parâmetros

De interesse.

Sem interesse.

Parâmetros inconvenientes (*nuisance parameters*).

Parâmetros

De interesse.

Sem interesse.

Parâmetros inconvenientes (*nuisance parameters*).

Estudo da Superfície

Impraticável estudar muitos parâmetros ao mesmo tempo.

Modelos com Muitos Parâmetros

Evitando a Superfície de Verossimilhança

Parâmetros

De interesse.

Sem interesse.

Parâmetros inconvenientes (*nuisance parameters*).

Estudo da Superfície

Impraticável estudar muitos parâmetros ao mesmo tempo.

Estudo direto da superfície é impossível.

Modelos com Muitos Parâmetros

Evitando a Superfície de Verossimilhança

Parâmetros

De interesse.

Sem interesse.

Parâmetros inconvenientes (*nuisance parameters*).

Estudo da Superfície

Impraticável estudar muitos parâmetros ao mesmo tempo.

Estudo direto da superfície é impossível.

Solução:

Modelos com Muitos Parâmetros

Evitando a Superfície de Verossimilhança

Parâmetros

De interesse.

Sem interesse.

Parâmetros inconvenientes (*nuisance parameters*).

Estudo da Superfície

Impraticável estudar muitos parâmetros ao mesmo tempo.

Estudo direto da superfície é impossível.

Solução:

Estudar um parâmetro por vez.

Modelos com Muitos Parâmetros

Evitando a Superfície de Verossimilhança

Parâmetros

- De interesse.
- **Sem** interesse.
- Parâmetros inconvenientes (*nuisance parameters*).

Estudo da Superfície

- Impraticável estudar muitos parâmetros ao mesmo tempo.
- Estudo direto da superfície é impossível.

Solução:

- Estudar um parâmetro por vez.
- Estudar “*cortes*” da superfície.

Verossimilhança Estimada e Perfilhada

Verossimilhança Estimada e Perfilhada

Verossimilhança Estimada e Perfilhada

Varia apenas o parâmetro de interesse.

Verossimilhança Estimada e Perfilhada

Varia apenas o parâmetro de interesse.

Os demais são mantidos fixos no valor da MLE.

Verossimilhança Estimada e Perfilhada

Varia apenas o parâmetro de interesse.

Os demais são mantidos fixos no valor da MLE.

Verossimilhança Estimada e Perfilhada

Verossimilhança Estimada

Varia apenas o parâmetro de interesse.

Os demais são mantidos fixos no valor da MLE.

Verossimilhança Perfilhada

Varia apenas o parâmetro de interesse.

Verossimilhança Estimada e Perfilhada

Verossimilhança Estimada

Varia apenas o parâmetro de interesse.

Os demais são mantidos fixos no valor da MLE.

Verossimilhança Perfilhada

Varia apenas o parâmetro de interesse.

Os demais são estimados condicionalmente ao valor do parâmetro de interesse.

Verossimilhança Estimada e Perfilhada

Verossimilhança Estimada

Varia apenas o parâmetro de interesse.

Os demais são mantidos fixos no valor da MLE.

Verossimilhança Perfilhada

Varia apenas o parâmetro de interesse.

Os demais são estimados condicionalmente ao valor do parâmetro de interesse.

Estimação por máxima verossimilhança.

Verossimilhança Estimada

Exemplo da Distrbuição Gaussiana

Verossimilhança Estimada

Exemplo da Distrbuição Gaussiana

Log-Verossimilhança Negativa

$$\mathbf{L}\{\mu, \sigma | \mathbf{X}_n\} = \frac{n}{2} \ln(2\pi) + \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) + \frac{1}{2\ \sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

Verossimilhança Estimada

Exemplo da Distrbuição Gaussiana

Log-Verossimilhança Negativa

Verossimilhança Estimada da Média

$$\mathbf{L}\{\mu, \sigma|\mathbf{X}_n\} = \frac{n}{2}\ln(2\pi) + \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) + \frac{1}{2\ \sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

Verossimilhança Estimada

Exemplo da Distrbuição Gaussiana

$$\mathbf{L}\{\mu, \sigma | \mathbf{X}_n\} = \frac{n}{2} \ln(2\pi) + \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) + \frac{1}{2\ \sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

MLE do desvio padrão: $\widehat{\sigma}$.

Verossimilhança Estimada

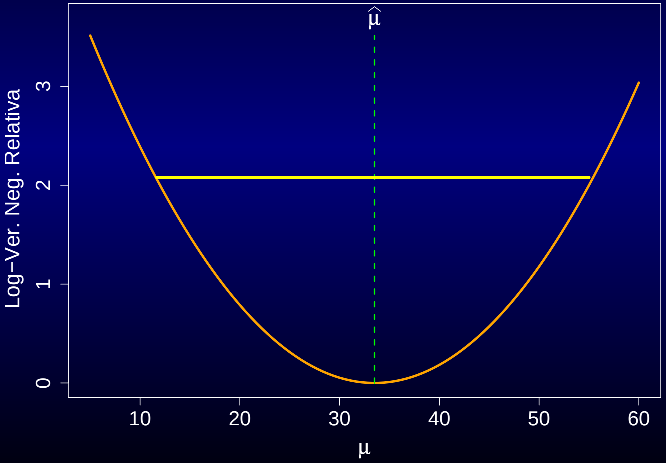
Exemplo da Distrbuição Gaussiana

$$\mathbf{L}\{\mu, \sigma | \mathbf{X}_n\} = \frac{n}{2}\ln(2\pi) + \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) + \frac{1}{2\ \sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

MLE do desvio padrão: $\widehat{\sigma}$.

$$\mathbf{L}_E\{\mu | \widehat{\sigma}\} = \frac{n}{2}\ln(2\pi) + \frac{n}{2}\ln(\widehat{\sigma}^2) + \frac{1}{2\ \widehat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

Verossimilhança Estimada da Média



Verossimilhança Estimada

Exemplo da Distrbuição Gaussiana

Verossimilhança Estimada

Exemplo da Distrbuição Gaussiana

Verossimilhança Estimada

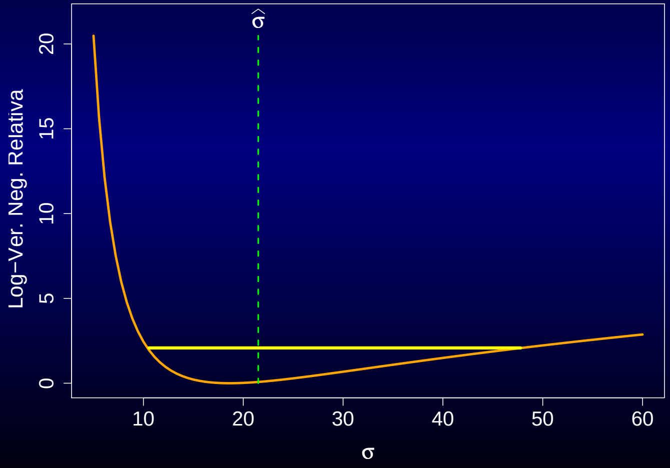
Exemplo da Distrbuição Gaussiana

MLE da média: $\widehat{\mu}$.

MLE da média: $\widehat{\mu}$.

$$\mathbf{L}_E\{\sigma|\widehat{\mu}\} = \frac{n}{2}\ln(2\pi) + \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) + \frac{1}{2\ \sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \widehat{\mu})^2$$

Verossimilhança Estimada do Desvio Padrão



Verossimilhança Perfilhada

Exemplo da Distrbuição Gaussiana

Verossimilhança Perfilhada

Exemplo da Distrbuição Gaussiana

Verossimilhança Perfilhada da Média

MLE do desvio padrão condicionado à média:

MLE do desvio padrão condicionado à média:

$$\widehat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}$$

MLE do desvio padrão condicionado à média:

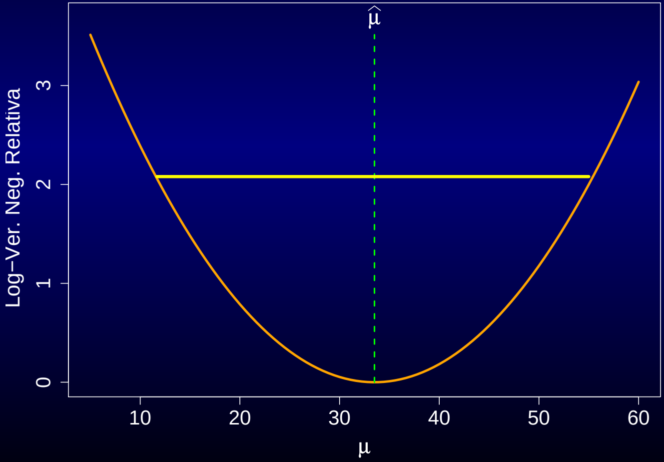
$$\widehat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}$$

$$\mathbf{L}_P\{\mu|\widehat{\sigma}\} = \frac{n}{2}\ln(2\pi) + \frac{n}{2}\ln\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \widehat{\mu})^2\right] + \frac{n}{2}$$

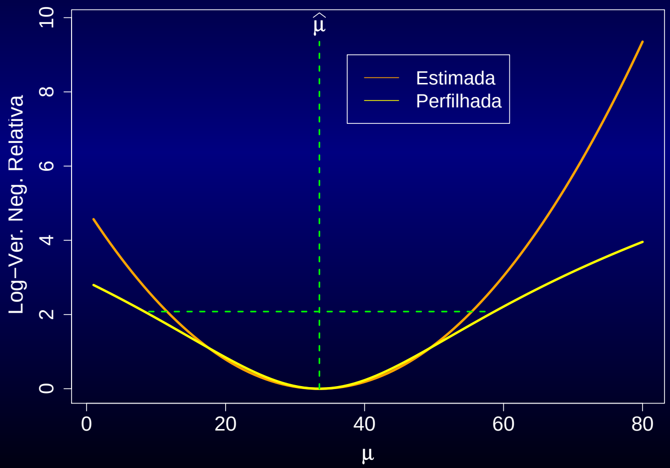
Verossimilhança Perfilhada

Exemplo da Distrbuição Gaussiana

Verossimilhança Perfilhada



Comparação para Média



Muito Obrigado!