

Variável Aleatória

SUCESSOS

COMBINAÇÕES POSSÍVEIS

P

0



1/4

1



ou

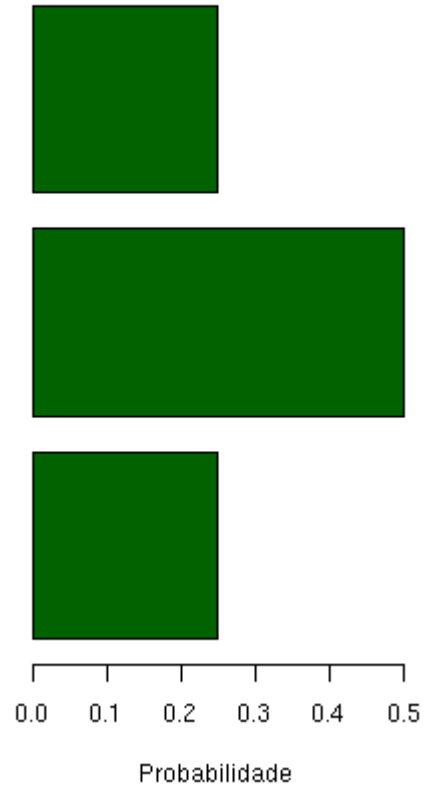


2/4

2



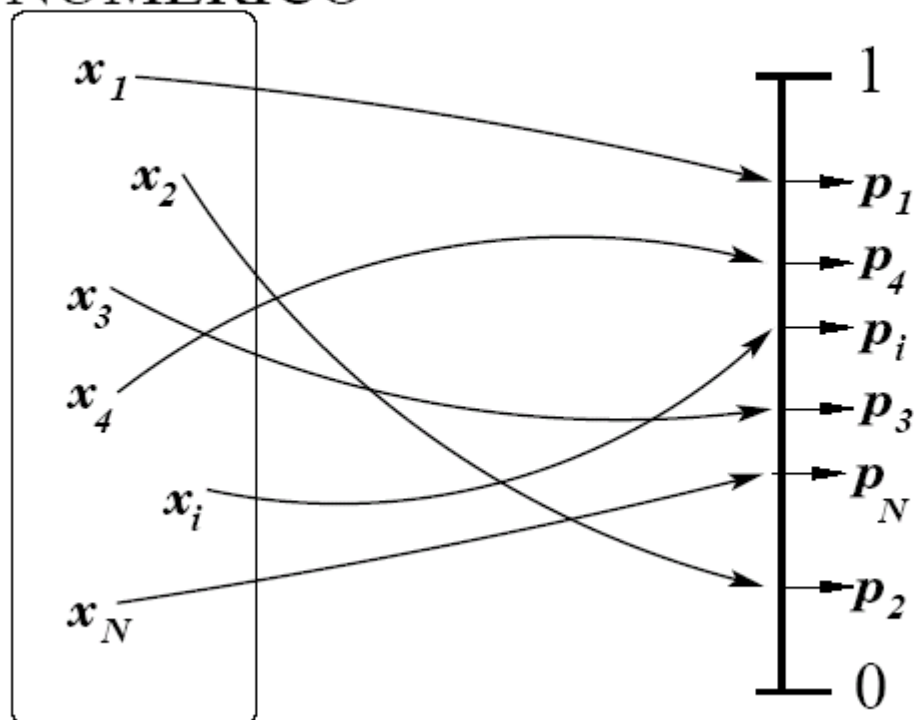
1/4



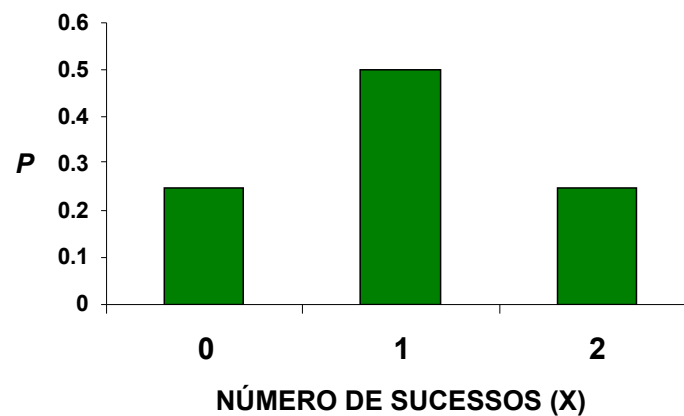
Funções de Probabilidade

CONJUNTO
NUMERICO

INTERVALO



$$f(x) = P(X = x_i)$$



Função de Probabilidade

$$f(x) = \binom{\mathbf{n}}{x} \mathbf{p}^x (1 - \mathbf{p})^{n-x}$$

Em negrito: parâmetros da distribuição

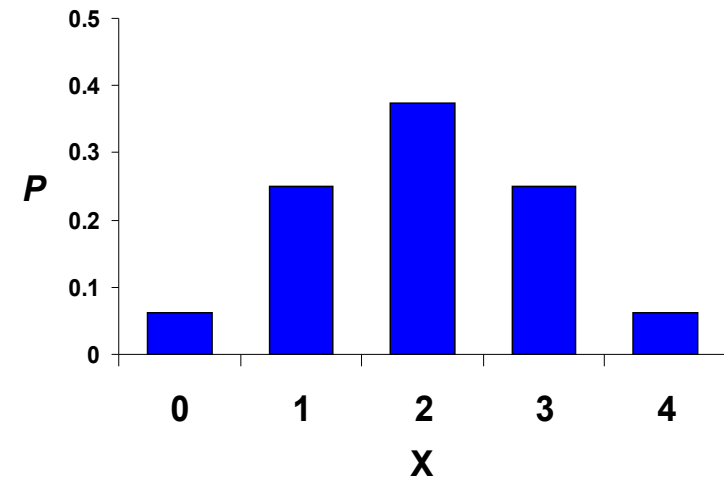
x	f(x) = P(X = x)
0	$1 \times 0,5^0 \times (1 - 0,5)^{2-0} = 1 \times 1 \times 0,25 = 0,25$
1	$2 \times 0,5^1 \times (1 - 0,5)^{2-1} = 2 \times 0,5 \times 0,5 = 0,50$
2	$1 \times 0,5^2 \times (1 - 0,5)^{2-2} = 1 \times 0,25 \times 1 = 0,25$

Esperança e Variância

X	P	X x P	(X - E(X))²	(X - E(X))² x P
0	0,0625	0	4	0,25
1	0,250	0,25	1	0,25
2	0,375	0,75	0	0
3	0,250	0,75	1	0,25
4	0,0625	0,25	4	0,25
		2		1

$$E[X] = \sum x_i P_i$$

$$VAR[X] = E[(x - E[X])^2]$$



RESUMINDO ...

- Variável aleatória = distribuição de probabilidades = função de probabilidade.
- A distribuição de probabilidades é uma função que estabelece uma relação entre um conjunto de valores e o intervalo de probabilidades $[0,1]$.
- Cada distribuição têm parâmetros próprios, que a definem.
- Média e variância são valores esperados, deduzidos da distribuição.

Distribuição Binomial

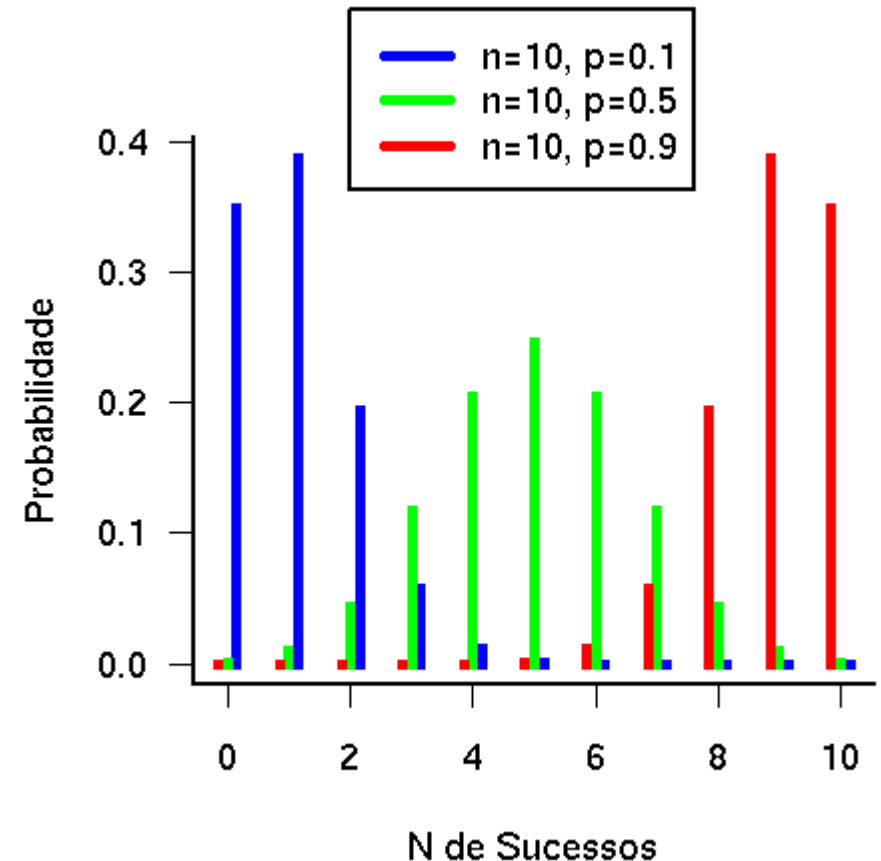
$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

n = número de tentativas (inteiro positivo)

p = probabilidade de sucesso por tentativa (0 a 1)

$$E[X] = np$$

$$VAR[X] = np(1-p)$$



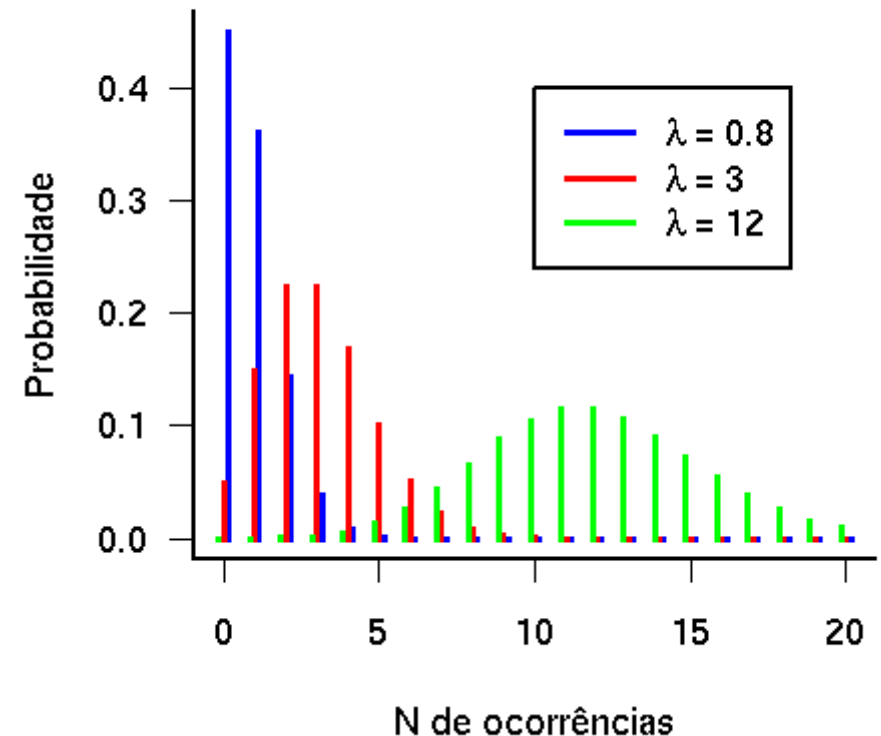
Distribuição Poisson

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

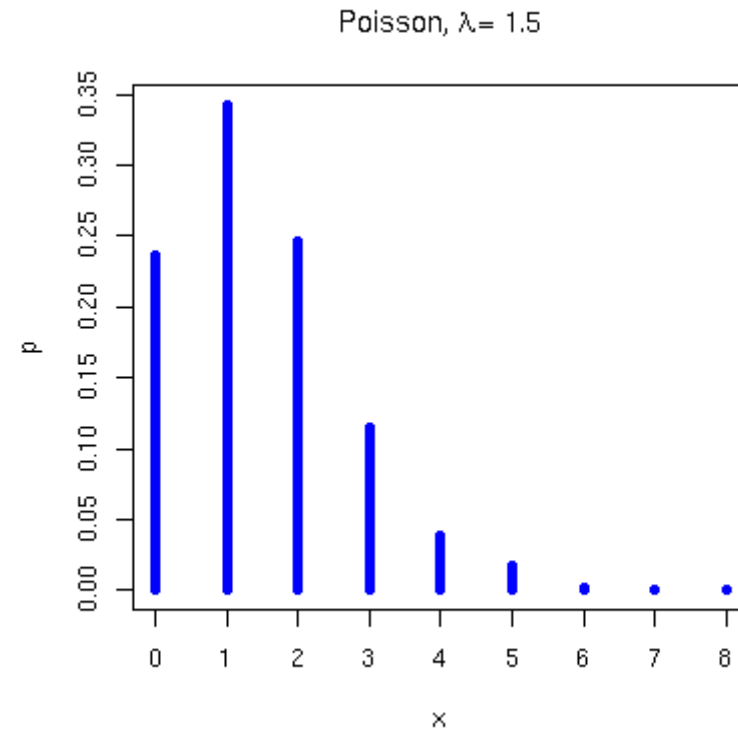
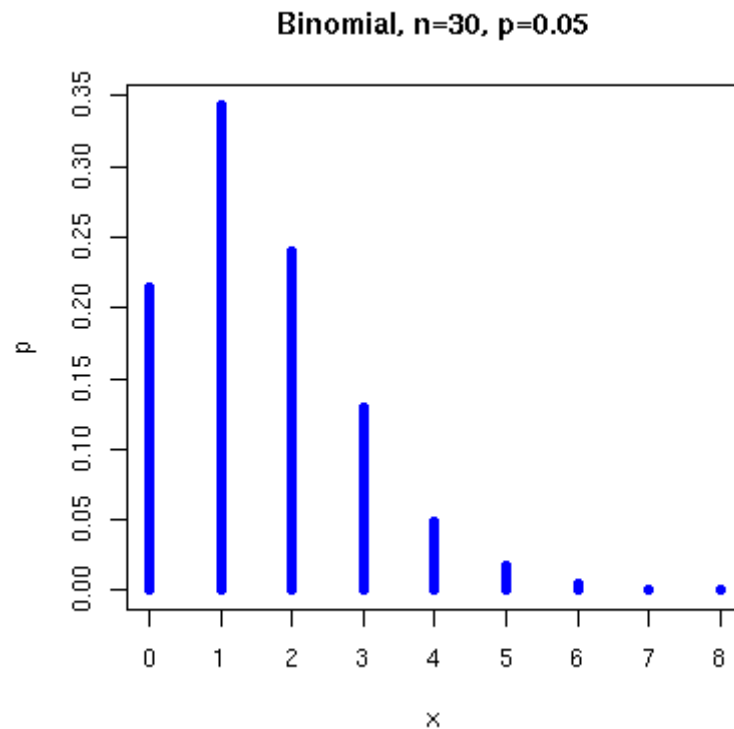
λ = taxa de ocorrência por unidade de espaço ou tempo (real positivo)

$$E[X] = \lambda$$

$$VAR[X] = \lambda$$



Relações entre Distribuições - 1



Binomial $\xrightarrow{\text{n alto, p baixo}}$ Poisson

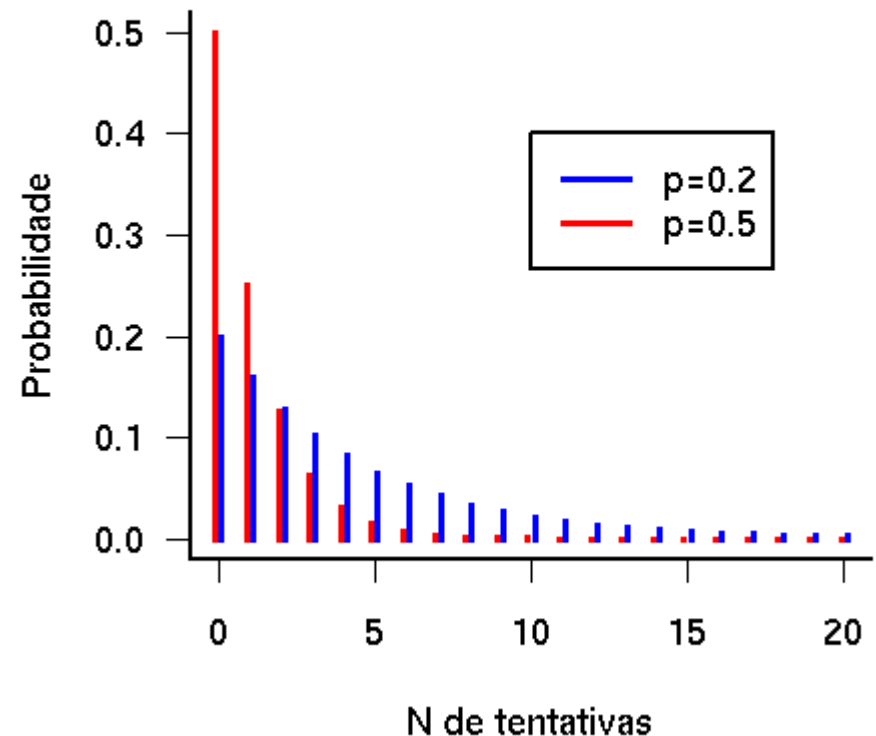
Distribuição Geométrica

$$f(x) = p(1-p)^x$$

p = probabilidade de sucesso por tentativa (0 a 1)

$$E[X] = \frac{1-p}{p}$$

$$VAR[X] = \frac{1-p}{p^2}$$



Distribuição Binomial Negativa

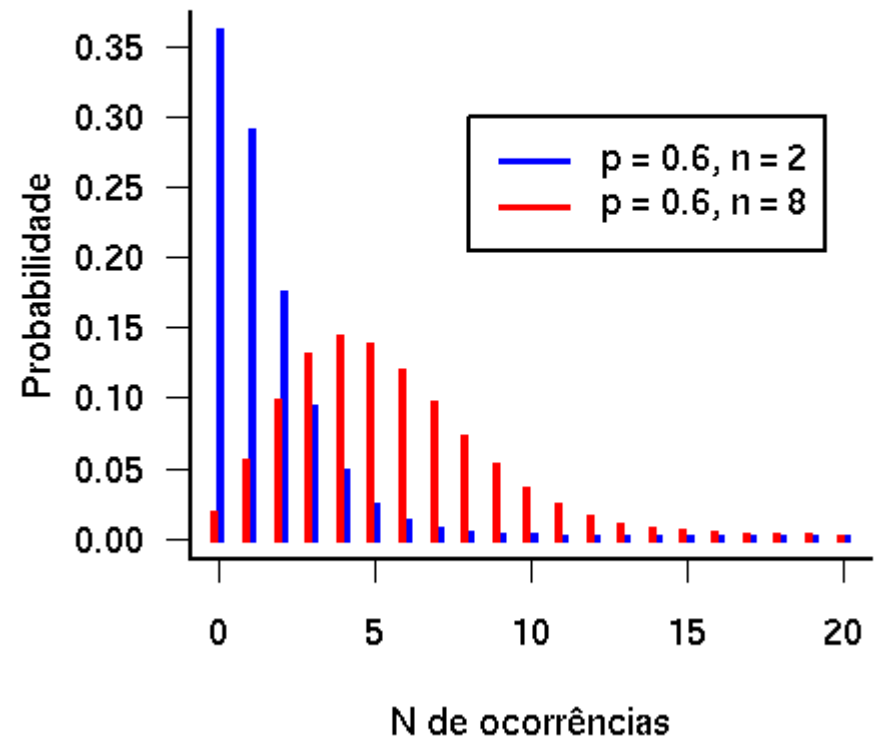
$$f(x) = \frac{(n+x-1)!}{(n-1)! x!} p^n (1-p)^x$$

p = probabilidade de sucesso por tentativa (0 a 1)

n = número de sucessos a aguardar (inteiro positivo)

$$E[X] = \frac{n(1-p)}{p}$$

$$VAR[X] = \frac{n(1-p)}{p^2}$$



Relações entre Distribuições - 2

$$f(x) = \frac{(n+x-1)!}{(n-1)!x!} p^n (1-p)^x$$

$$n=1 \rightarrow \frac{(1+x-1)!}{(1-1)!x!} p^1 (1-p)^x = p(1-p)^x$$

Binomial Negativa $\xrightarrow{n=1}$ Geométrica

Distribuição Binomial Negativa

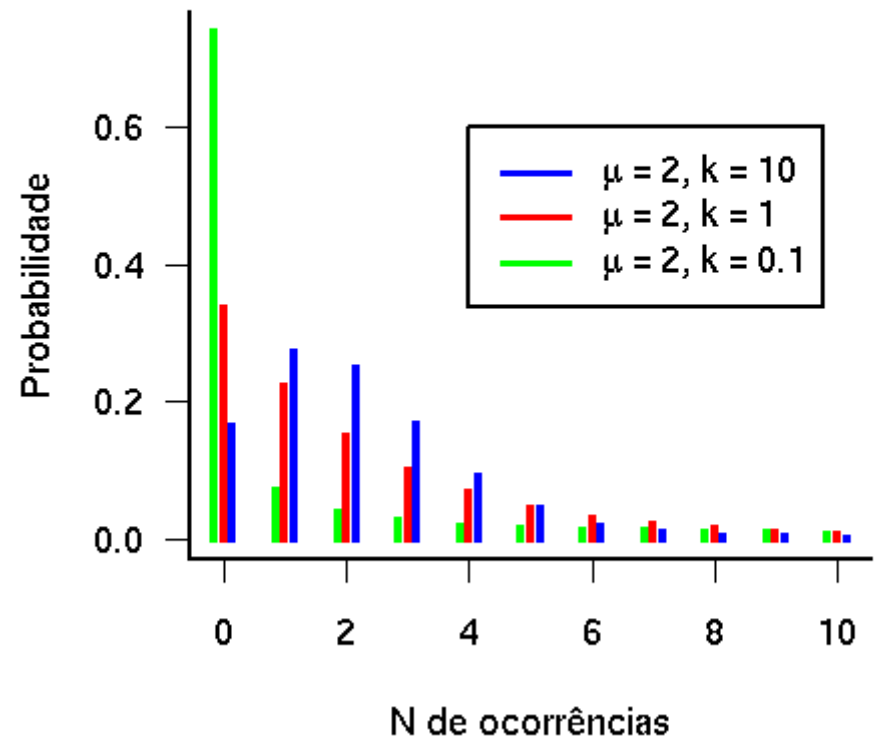
$$f(x) = \frac{\Gamma(k+x)}{\Gamma(k)x!} \cdot \left(\frac{k}{k+\mu}\right)^k \cdot \left(\frac{\mu}{k+\mu}\right)^x$$

μ = média de ocorrências (real positivo)

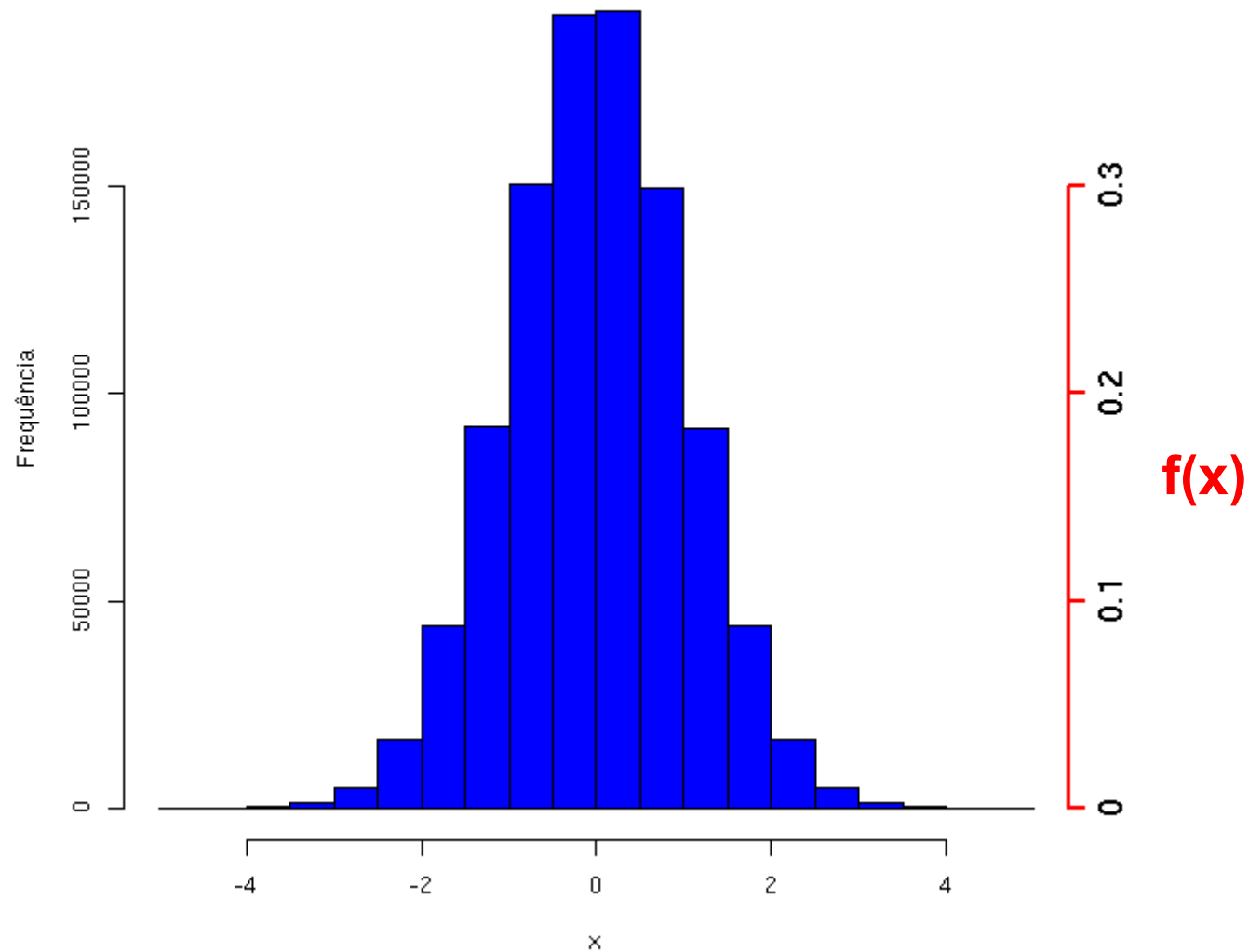
k = índice de dispersão (real positivo)

$$E[X] = \mu$$

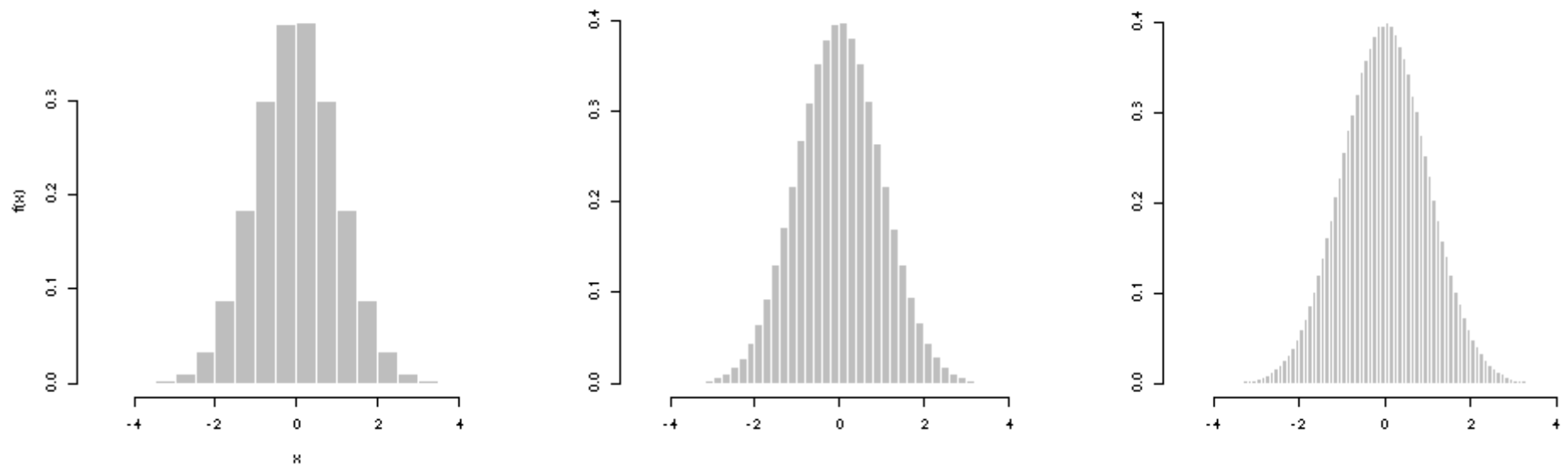
$$VAR[X] = \mu + \frac{\mu^2}{k}$$



Variáveis Aleatórias Contínuas



Função de Densidade de Probabilidade



$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

Distribuição Normal

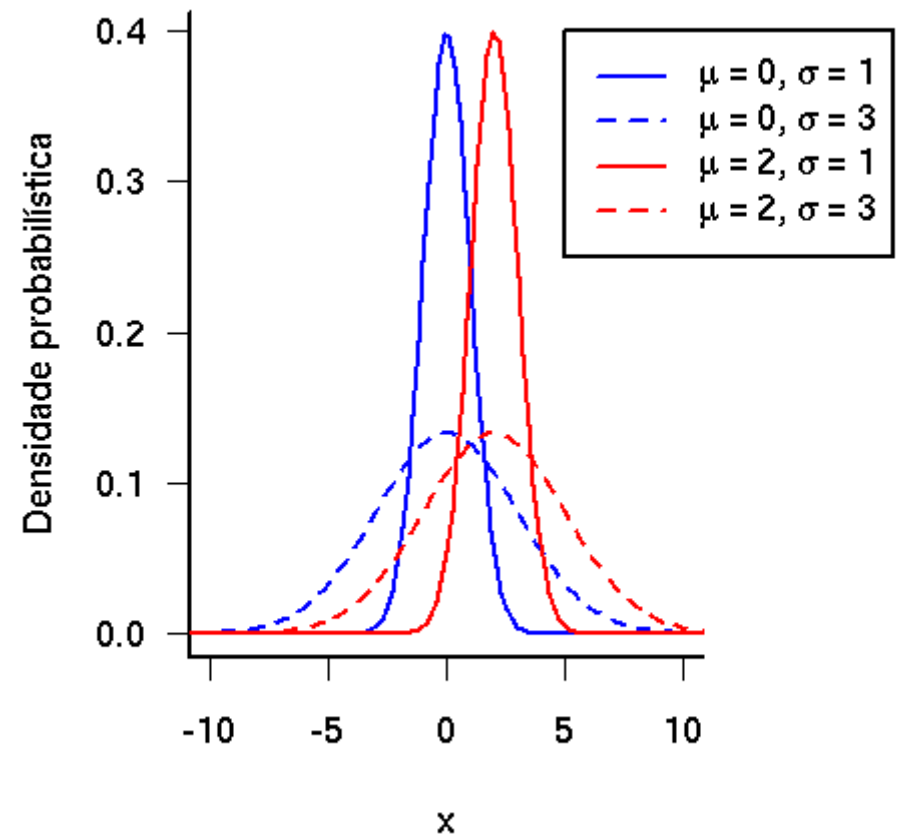
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

μ = média (real)

σ = desvio-padrão (real positivo)

$$E[X] = \mu$$

$$VAR[X] = \sigma^2$$



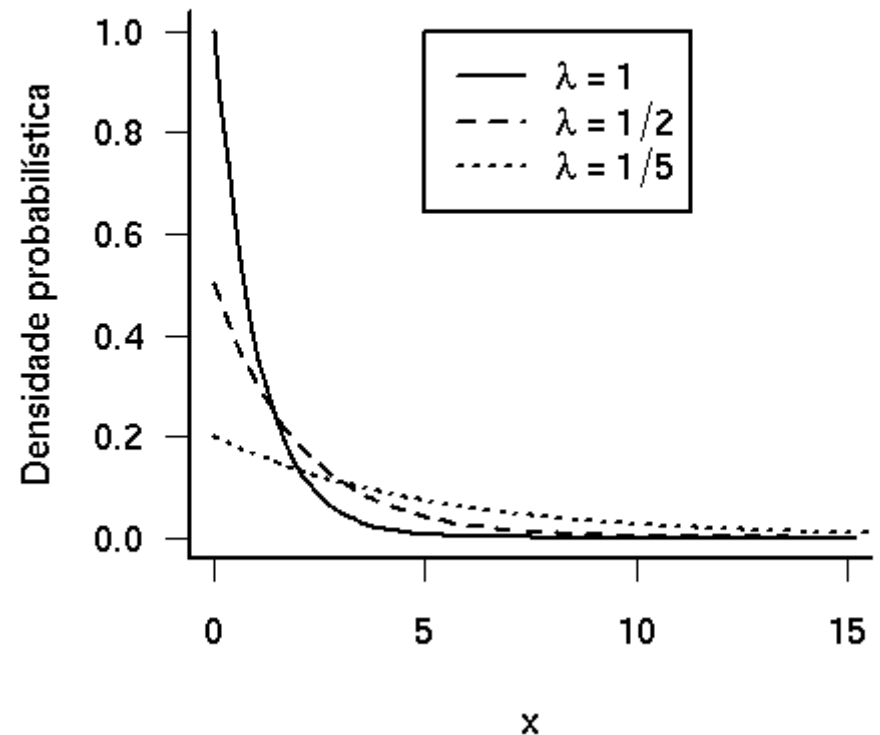
Distribuição Exponencial

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

λ = taxa de decaimento,
desaparecimento ou mortalidade
(real positivo)

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

$$VAR[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$



Distribuição Gama

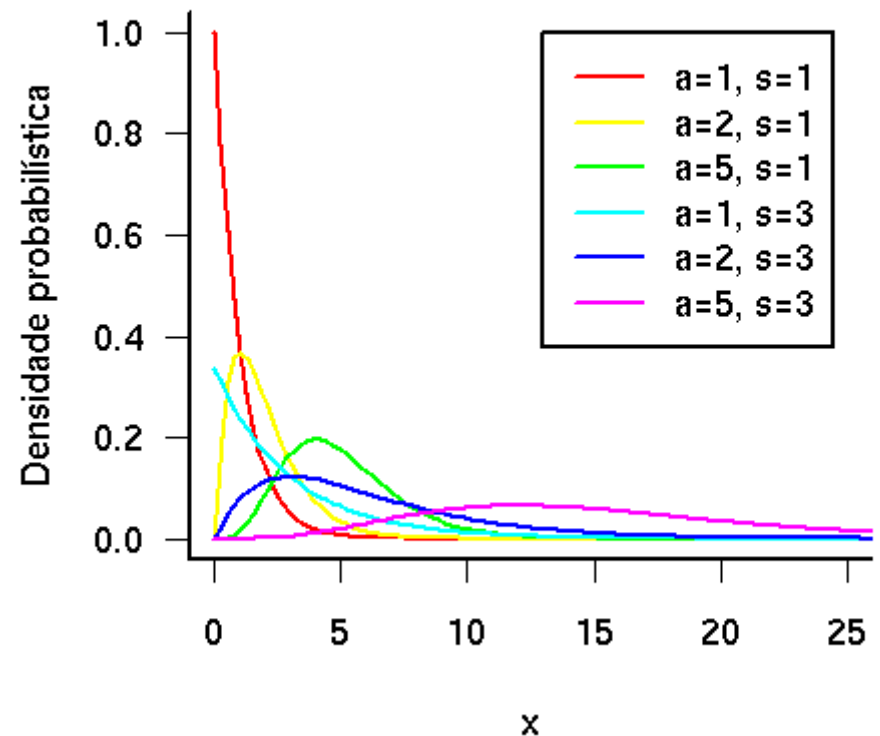
$$f(x) = \frac{1}{s^a \Gamma(a)} x^{a-1} e^{-x/s}$$

a = forma (real positivo)

s = escala ou **r** = 1/s = taxa
(real positivo)

$$E[X] = as$$

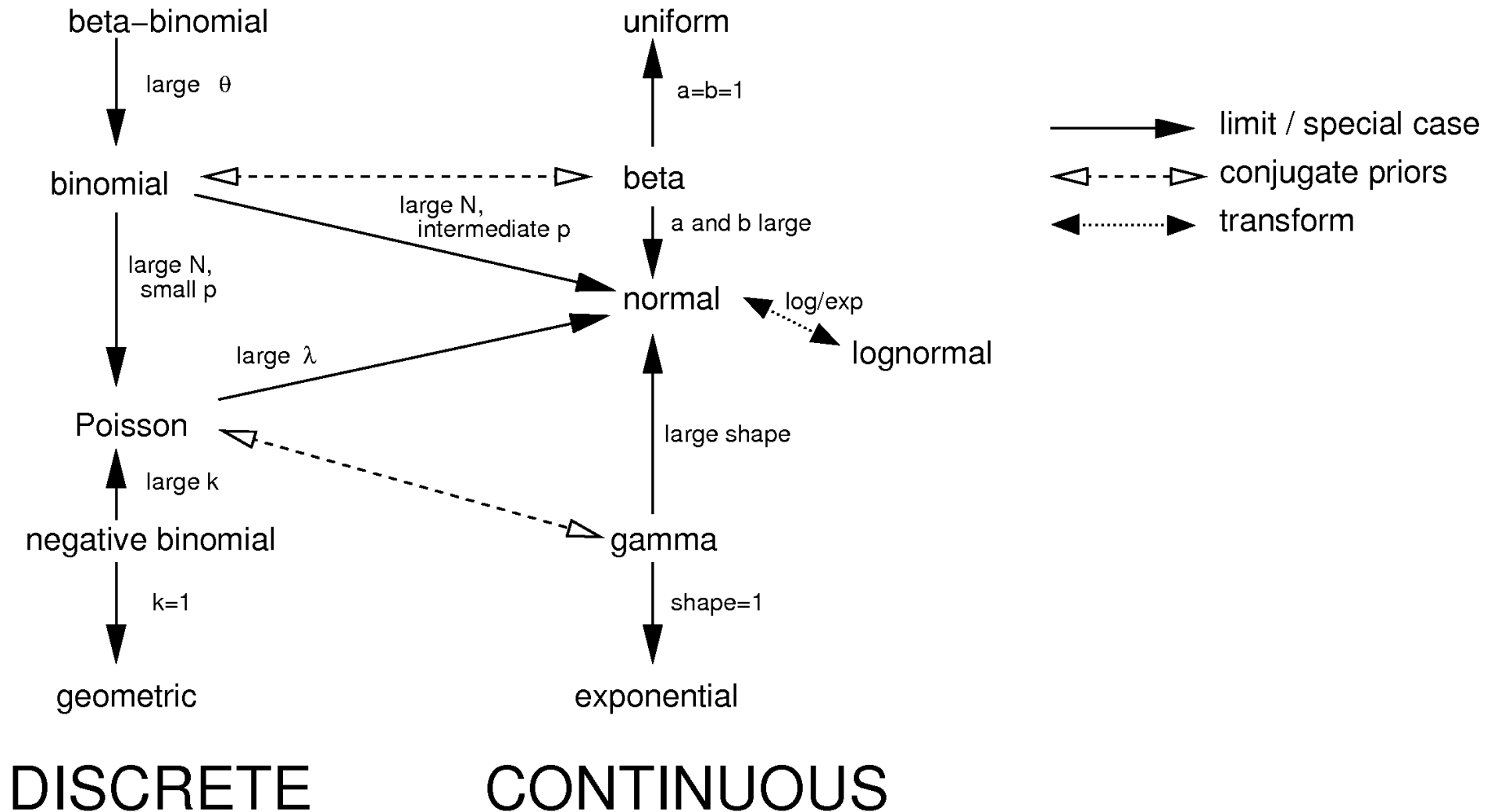
$$VAR[X] = as^2$$



RESUMINDO ...

- Distribuições de probabilidade discretas associam valores às suas probabilidades (PMF).
- Distribuições de probabilidade contínuas associam valores às suas densidades de probabilidade (PDF).
- Algumas distribuições são casos especiais de outras.
- Algumas distribuições são casos-limite de outras.
- Muitas distribuições discretas têm uma correspondente contínua.

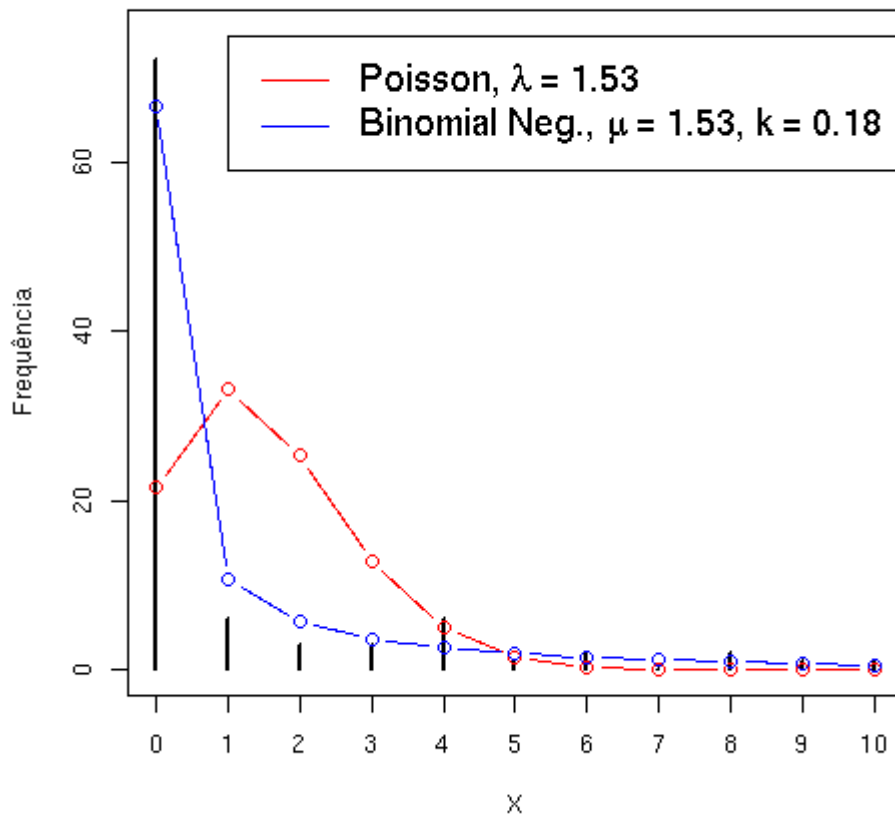
Relações entre as Distribuições



RESUMINDO ...

- O valor dos parâmetros determina a forma das distribuições.
- Muitas distribuições podem ser generalizadas para aplicações diferentes daquelas para quais foram propostas.
- Uma distribuição pode ser re-parametrizada.
- Média e variância não são parâmetros da distribuição, embora possam ser expressas como funções destes.
- Em muitas distribuições, média e variância estão correlacionadas.

Método dos Momentos



$$\hat{\mu} = \hat{\lambda} = \bar{x} = 1.53$$

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 = 14.554$$

$$\sigma^2 = \mu + \frac{\mu^2}{k} \rightarrow \hat{k} = \frac{\bar{x}^2}{s^2 - \bar{x}} = 0.18$$

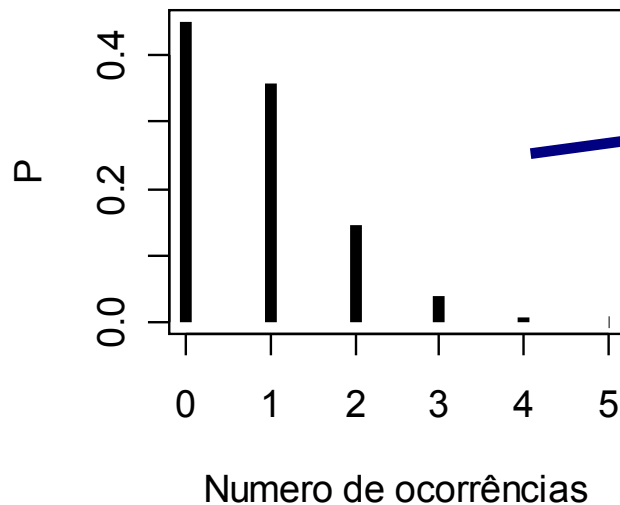
Distribuições de Probabilidade no R

- **d**[distr] = densidade probabilística (pdf)
- **p**[distr] = probabilidade acumulada (cdf)
- **q**[distr] = quantil
- **r**[distr] = sorteio de valores

DISTRIBUIÇÕES ESTATÍSTICAS NO R

Distribuição	Nome no R	Parâmetros ¹⁾
beta	beta	shape1, shape2, ncp
binomial	binom	size, prob
Cauchy	cauchy	location, scale
qui-quadrado	chisq	df, ncp
exponential	exp	rate
F	f	df1, df2, ncp
gamma	gamma	shape, scale
geométrica	geom	prob
hipergeométrica	hyper	m, n, k
log-normal	lnorm	meanlog, sdlog
logística	logis	location, scale
binomial negativa	nbinom	size, prob
normal	norm	mean, sd
Poisson	pois	lambda
t de Student	t	df, ncp
uniforme	unif	min, max
Weibull	weibull	shape, scale
Wilcoxon	wilcox	m, n

Teorema Central do Limite



30 números tomados de uma população com distribuição Poisson com $\lambda = 0,8$

{1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 3, 0, 1, 0, 3, 0, 1}

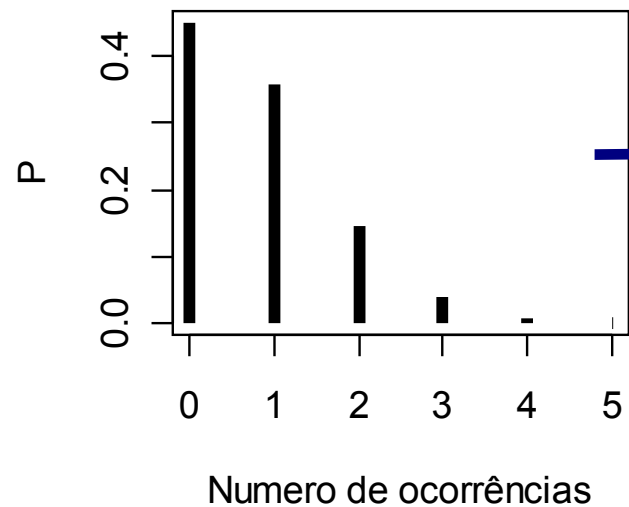
Média da amostra = 0,6667

Se repetimos o procedimento 10 vezes:

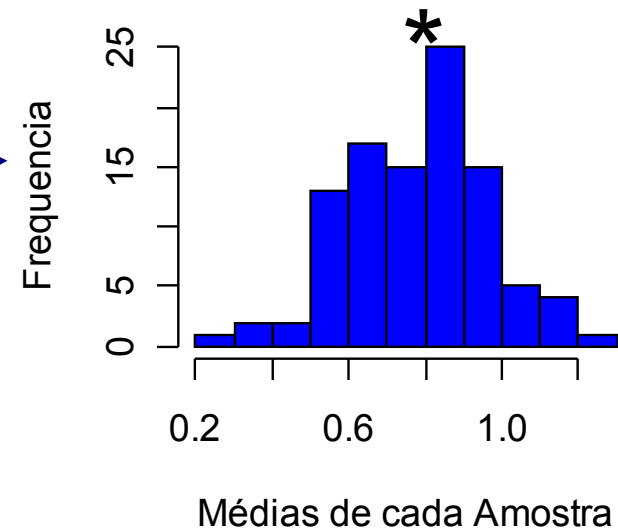
- Médias: {0,867; 0,5; 0,867; 0,667; 0,7; 0,9; 0,7; 0,367; 0,6; 0,767}
- Média das médias = 0.693

Teorema Central do Limite

Se repetimos 100 vezes ...



100 amostras



*** = média = 0,796**