MENSURAÇÃO DE ÁRVORES

UMA INTRODUÇÃO À DENDROMETRIA

João L. F. Batista

Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"
Universidade de São Paulo

Piracicaba
2001

Mensuração de Árvores: Uma Introdução à Dendrometria

Departamento de Ciências Florestais,
Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz",
Universidade de São Paulo
Av. Pádua Dias, 11
Caixa Postal 9
13418-900, Piracicaba - SP

Email: parsival@usp.br

Frondi tenere e belle
Del mio platano amato
Per voi risplenda il fato
Tuoni, lampi e procelle

Non v'oltraggino mai la cara place
Ne giunga a profanarvi austro rapace!

Ombra mai fù
Di vegetabile
Cara ed amabile
*Soave più**

* Adaptação anônima do libreto de Minato (1654) para ópera Xerxes de Handel (1738):
"Belos e suaves ramos / De minha singela árvore amada / Por ti fulgura meu fado / Trovões, raios e tormentas
Jamais perturbam tua majestosa calma / Nem ventos vorazes conseguem profanar-te
Nunca houve uma sombra / De ramos / Mais doce, mais refrescante / Ou mais gentil"

SUMÁRIO

PREFÁCIO

A atividade profissional florestal, como nós a conhecemos no Ocidente, foi provavelmente iniciada no século XVIII na Europa, quando o abastecimento de madeira se tornou problemático. Nesta época, a civilização Ocidental ainda era uma "civilização da madeira". A madeira não era apenas a matéria prima essencial para edificação e manufatura em geral, mas também a principal fonte de energia tanto para atividades domésticas quanto industriais. A origem da profissão florestal, portanto, está ligada à quantificação da madeira disponível nas florestas e, consequentemente, teve um forte componente de mensuração.

A mensuração florestal evoluiu muito durante a existência da profissão, partindo dos métodos de avaliação originais, que dependiam mais da vivência do profissional que de qualquer técnica, chegando à utilização atual de instrumentos de laser e do computador eletrônico no processamento das informações. Durante a sua evolução, ela manteve uma preocupação constante com os procedimentos de campo e com os métodos de análise das informações. Com o surgimento da teoria estatística no final do século XIX e início do século XX, os florestais tiveram vários dos seus métodos de campo ratificados pela nascente teoria da amostragem, e puderam lançar mão de novas técnicas de análise, como a regressão linear, por exemplo.

Neste volume, apresentamos os elementos básicos de Dendrometria, a disciplina das Ciências Florestais voltada para mensuração das árvores individuais. O material fornecido se restringe aos tópicos abordados nos cursos de graduação sendo, portanto, bastante conciso. Os dois capítulos inciais são dedicados aos conceitos básicos envolvidos na atividade de mensuração. O assunto é apresentado de modo bastante simples e seria possível discutí-lo com profundidade maior caso se introduzisse alguns elementos da teoria de erros. Os capítulos seguintes (3 a 5) tratam das grandezas mais frequentemente medidas em árvores: diâmetro, altura e volume, limitando-se quase que exclusivamente à apresentação e explicação dos métodos tradicionais de mensuração destas grandezas. Os capítulos finais são destinados a apresentação breve dos principais modelos dendrométricos geralmente utilizados na estimativa do volume de madeira de árvores e no sortimento desta madeira por classes de uso. São abordadas tanto a utilização dos modelos, quanto a construção destes, embora neste segundo caso a ênfase fique nos aspectos dendrométricos e não nos aspectos estatísticos de ajuste de modelos por regressão.

O material deste volume foi desenvolvido ao longo dos anos que lecionamos a disciplina de dendrometria para o curso de graduação em Engenharia Florestal. Sendo um material conciso, representa apenas parcialmente os assuntos tratados nesta disciplina, mas acreditamos que seja útil ao ensino e à aprendizagem dos conceitos básicos. Esperamos, assim, que seja útil a professores, estudantes e profissionais envolvidos com a questão de mensuração de árvores.

Durante os anos de lecionamento de disciplina Dendrometria, muitos nos auxiliaram na produção deste material. Agradecemos a colaboração de todos, mas especialmente dos estudantes com suas dúvidas e sugestões, e de Débora Letícia, que sempre teve disposição para revisar o texto, melhorando sensivelmente a sua clareza.

João L. F. Batista
março de 2001

CAPÍTULO 1

PRINCÍPIOS DE MENSURAÇÃO

Medidas e medições são realidades comuns no nosso dia-a-dia, tão comuns que a maioria das pessoas não saberia definir o que é “medir” alguma coisa. Entretanto, a mensuração ou medição deixa de ser uma assunto trivial quando as informações obtidas são utilizadas para a tomada de decisões que envolvem riscos de elevadas perdas materiais. Informações complexas são, em geral, resultado da combinação de informações e medidas simples, cabe, portanto, examinar com certo detalhamento o que é mensuração e como o seu resultado deve ser manipulado. Nesse capítulo, abordamos conceitos básicos de mensuração e sistemas de unidades. A maior parte do que é apresentado segue Husch et al. (1983) e, portanto, evitamos citações repetitivas a esses autores.

1.1 O que é medir?

Uma definição formal de mensuração é apresentada por Ellis (1966, citado por Husch et al., 1983):

> *“Uma medida é uma atribuição de <u>números</u> a coisas de acordo com uma <u>regra determinativa</u> e <u>não-degenerativa</u>.”*

Por *“determinativa”* entende-se que, sob condições constantes, os mesmos números, ou amplitude de números, são atribuídos aos mesmos objetos. O termo *“não-degenerativa”* implica que números diferentes são atribuídos a objetos diferentes, ou a objetos iguais sob condições diferentes. Portanto, medir significa atribuir sempre os mesmos números, ou amplitude de números, a um objeto quando este é observado sob condições idênticas. Quando objetos diferentes são observados, os números ou amplitude de números atribuidos, devem diferir.

No parágrafo anterior, a ressalva “ou amplitude de números” esteve presente em todas as afirmações. Mais do que um preciosismo, essa ressalva é importante, pois, como veremos, duas pessoas utilizando uma mesma escala, digamos uma regra graduada em milímetros, podem obter medidas ligeiramente diferentes para um mesmo objeto. Entretanto, medidas dadas por diferentes pessoas, ou a mesma pessoa em medições sucessivas, permanecerá sempre dentro de uma certa amplitude. É a essa amplitude de números que a definição de medição se refere. Conceituação mais clara dessa amplitude será dada quando discutirmos algarismos significativos.

Uma conceituação mais ampla de medição pode ser obtida se relaxarmos um pouco a definição proposta por Ellis. Avaliações qualitativas também podem ser consideradas formas de mensuração, o que impica em uma definição ligeiramente distinta:

> *"Uma medida é um atributo, qualitativo ou quantitativo, conferido a coisas de acordo com uma regra determinativa e não-degenerativa.*

Ao conferirmos um atributo qualitativo ou quantitativo a uma coisa podemos nos referir a um número, a uma nota, ou a uma classificação subjetiva. O aspecto a ser relaxado em relação a definição de Ellis é que o conceito de "amplitude de números" passa a ser uma "amplitude de atributos". A subjetividade da medição estará relacionada com a regra ou *"escala"* utilizada. Uma análise mais detalhada das escalas possíveis tornará a discussão mais clara.

1.2 Escalas de mensuração

As regras utilizadas para a medição de um objeto podem ser agrupadas de acordo com as seguintes escalas:

Escala Nominal: os atributos utilizados fazem parte de um conjunto de atributos sem qualquer relação mais clara entre si. Medir nessa escala é sinônimo de classificar. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1: Em levantamentos de florestas nativas, a espécie de cada árvore é identificada. Isso corresponde a classificar as árvores por espécie, ou conferir o atributo espécie para cada árvore. Embora essa atividade seja raramente concebida como uma mensuração, ela é fundamental para qualquer análise subsequente. Frequentemente ignoramos o fato que as árvores podem estar sendo erroneamente identificadas, ou que diferentes nomes (mesmo nomes científicos) podem identificar espécies que, para todas finalidades práticas, são idênticas.

Exemplo 2: Os diferentes lotes de semente de uma dada espécie de *Eucalyptus* são identificados de acordo com a procedência. Num experimentos de comparação de procedência, aquelas com melhor desempenho silvicultural são selecionadas para plantio comercial. As procedências representam os atributos e o processo não é considerado nem mesmo uma classificação pois os lotes já chegam com os rótulos de origem. O conceito de procedência, entretanto, é bastante impreciso. Quantas árvores foram amostradas em cada lote? Qual o tamanho da região onde tais árvores estavam distribuídas? Tais árvores representam uma mesma população ou diferentes populações? Uma procedência é uma população ou diferentes populações podem estar representadas numa procedência? Melhor seria considerar "procedência" como uma classificação (medição) preliminar. O objetivo final não é selecionar a "melhor" procedência, mas sim árvores com genótipo silviculturalmente superior.

Escala Ordinal: como o nome já sugere, nessa escala os atributos estão organizados numa sequência naturalmente crescente (ou decrescente). A escala é simplesmente "ordinal" porque não existe noção objetiva a respeito da "distância" entre os atributos sucessivos. Esse tipo de escala está presente no cotidiano de qualquer pessoa. Frequentemente, externamos julgamentos do tipo: "bom - regular - mau", "gelado - frio - morno - quente", "cedo - pontual - atrasado", "chato - normal - legal", "bonito - feio", etc.

Exemplo 1: Os sistemas de notas para árvores, de acordo com o seu formato de copa, tronco, casca ou qualquer outra característica, usam escalas ordinais. No Melhoramento Florestal, é comum se dar uma nota de 1 a 10 para árvores a serem designadas como matrizes de acordo com retidão do fuste, conicidade, formato de copa e inclinação dos ramos. Esse sistema pode dar a falsa impressão de que existe a mesma distância entre as notas 1 e 2, e as notas 9 e 10, mas na prática o sistema não difere muito de uma escala do tipo: "horrível", "péssimo", "muito ruim", "ruim", "regular", "quase boa", "boa", "muito boa", "ótima", "excelente".

Exemplo 2: Antes de serem enviadas para o campo, as mudas num viveiro florestal são organizadas em grupos conforme a sua altura e/ou qualidade. Dessa forma os lotes de mudas plantadas no campo são mais homogêneos, o que facilita o acompanhamento do desenvolvimento das mudas nos primeiros meses após o plantio. Em geral, tal classificação é feita sem uma escala ou metodologia formal, mas é intuitivo para os operários do viveiro organizar as mudas numa escala crescente.

Escala de Intervalo: Escalas de intervalos também estão presentes no nosso dia-a-dia, mas, em geral, não se nota que elas não possuem todas as propriedades matemáticas de uma escala quantitativa plena.

Exemplos mais comuns são: medidas de temperatura, horario do dia, medições de ângulos ou azimute/rumo.

Todas essas escalas são quantitativas, isto é, utilizam números, mas têm em comum o fato de que o ponto "zero" da escala é arbitrário ou não possui significado prático. No caso de horário, ângulos e azimutes, a escala é circular e o fato de utilizarmos a meia-noite ou o norte como ponto de partida é uma mera convenção, poderia perfeitamente ser às 6 horas da manhã (como em algumas culturas) ou o sul.

Numa escala de intervalo, o intervalo entre duas medidas tem o mesmo significado em qualquer ponto da escala. Dois graus Celsius de diferença entre as temperaturas de 10ºC e 12ºC representam a mesma realidade que a diferença entre 22ºC e 24ºC. Uma aula entre 14:00 e 15:00 horas, tem a mesma duração que uma aula das 7:00 e 8:00 horas. Isto implica que o resultado da adição ou subtração de medidas tomadas numa escala de intervalo têm significado real: 2 graus Celsius ou 1 hora de aula.

Já a multiplicação e divisão de medidas numa escala de intervalo caressem de significado real pois a inexistência de um ”ponto zero”torna sem sentido a razão entre duas medidas. Você diria que 20ºC é ”duas vêzes mais quente”que 10ºC ? Faz sentido dizer que 7:00 horas é um horário ”duas vêzes mais cedo”que 14:00 horas ? Na verdade, 20ºC é dez graus mais quente que 10ºC e 7:00 hs é sete horas mais cedo do que 14:00 hs. Nestas escalas, somente o intervalo entre duas medidas pode ser interpretado.

Escala de Razão: A escala de razão é a escala quantitativa plena. Ela possui três características essenciais:

a. ponto “zero” não arbitrário,

b. o comprimento de intervalo tem o mesmo significado em qualquer parte da escala e

c. a razão entre duas medidas tem significado prático.

A maioria das medidas numéricas obtidas na área florestal são desse tipo: diâmetro de uma árvore, área da secção transversal do tronco, volume do tronco, área basal de uma floresta, superfície foliar de uma floresta, biomassa, altura de árvores, etc.

1.3 Sistema Internacional de Unidades (SI)

Nas escalas quantitativas (escala de intervalo e escala de razão), as medições são tomadas com base num “sistema de unidades de medidas”. O sistema de unidades permite que medições realizadas por diferentes pessoas em diferentes situações sejam diretamente comparáveis. Para que um mesmo sistema fosse utilizado em todo o mundo, foi fundada em 1875 a Conferência Geral de Pesos e Medidas (CGPM). A CGPM é uma organização internacional que estabelece convenções sobre unidades e medidas e em 1960 estabeleceu o Sistema Internacional de Medidas (SI) que foi adotado por diversas nações e se estabeleceu de fato como um sistema universal.

O SI é composto de unidades básicas, unidades derivadas e unidades suplementares.

Unidades Básicas: unidades fundamentais do sistema de medidas.

1. Comprimento - METRO (m): o metro é igual a 1.650.763,73 comprimentos de onda da luz laranja-vermelho emitida pelo Criptônio-86 no vácuo.
2. Massa - KILOGRAMA (kg): O kilograma é equivalente à massa de um cilíndro da liga de palina-iridio mantido em Paris no Bureau Internacional de Pesos e Medidas.
3. Tempo - SEGUNDO (s): O segundo é definido com 9.192.631.770 vibrações da radiação emitida pelo átomo de Césio-133 num comprimento de onda específico.
4. Corrente Elétrica - AMPERE (A): Ampere é a corrente num par de fios de mesmo comprimento, retos, paralelos (1 m de distância) que produz uma força de 2×10^{-7} newtons entre os fios para cada metro de comprimento.
5. Temperatura - KELVIN (K): O kelvin é 1/273,15 da temperatura termodinâmica do ponto triplo da água. A temperatura 0 K é chamada de zero absoluto.

6. Quantidade de substância - MOL (mol): O mol é a quantidade de uma substância que contem um número de unidades elementares igual ao número de átomos em 0,012 kg do Carbono-12. As unidades elementares podem ser: átomos, moléculas, íons, e outras partículas.
7. Intensidade luminosa - CANDELA (cd): A candela é 1/600.000 da intensidade, na direção perpendicular, de um metro quadrado de um radiador perfeito (corpo negro) à temperatura de solidificação da platina (2045K) sob pressão de 101.325 newtons por metro quadrado.

Unidades Derivadas: são expressas em termos das unidades básicas.

Grandeza	**Unidade no SI**	**Símbolo**
Área	metro quadrado	m^2
Volume	metro cúbico	m^3
Força	newton (1 N = 1 kg m/s^2)	N
Pressão	pascal (1 P = 1 N/m^2)	P
Trabalho	joule (1 J = 1N m)	J
Potência	watt (1 W = 1J/s)	W
Velocidade	metro por segundo	m/s
Aceleração	(metro por segundo) por segundo	m/s^2
Voltagem	volt (1 V = 1 W/A)	V
Resitência Elétrica	ohm (1 Ω = 1 V/A)	Ω
Concentração	mol por metro cúbico	mol/m^3

Unidades Suplementares: são duas unidades que se relacionam à medição de ângulos.

1. Ângulo no plano - RADIANOS (rad): O radiano é o ângulo entre dois raios de uma circunferência que definem um arco de comprimento igual ao raio. 1 rad = 57,29578 graus (figura 1.1).
2. Ângulo no espaço (3 dimensões) - ESTEREORRADIANOS (sr): O estereorradianos é o ângulo sólido no centro de uma esfera cuja secção na superfície da esfera tem área igual ao quadrado do raio (figura 1.1).

Para cada unidade de medida é possível expressar um múltiplo ou uma fração da mesma. O SI também define a nomenclatura para múltiplos e frações com base no sistema decimal:

MÚLTIPLOS			FRAÇÕES		
Prefixo	Fator	Abreviação	Prefixo	Fator	Abreviação
tera	10^{12}	T	deci	10^{-1}	d
giga	10^9	G	centi	10^{-2}	c
mega	10^6	M	mili	10^{-3}	m
kilo	10^3	k	micro	10^{-6}	μ
hecto	10^2	h	nano	10^{-9}	n
deka	10^1	da	pico	10^{-12}	p

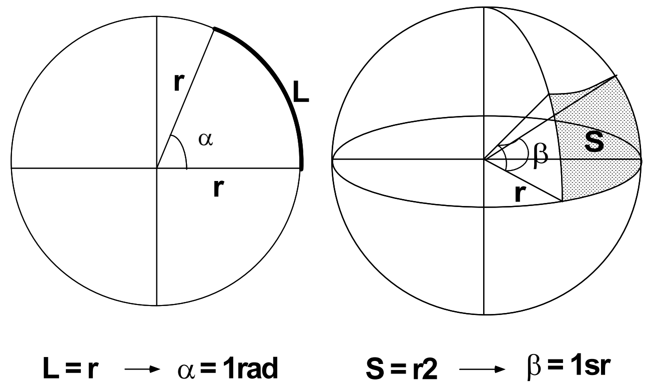

Figura 1.1: Medição de ângulos no plano e no espaço (3 dimensões) de acordo com o SI.

Por fim, é importante ressaltar que uma série de unidades de medidas utilizadas na atividade florestal não fazem parte do SI. As principais são:

Unidade	**Símbolo**	**Equivalência no SI**
minuto	min	1 min = 60 s
hora	h	1 h = 3600 s
dia	d	1 d = 24 h = 86.400 s
grau (ângulo)	^{o}	$1^o = (\pi/180)$ rad
minuto (ângulo)	’	1’ = $(1/60)^o = (\pi/10.800)$ rad
segundo (ângulo)	”	1” = (1/60)’ = $(\pi/648.000)$ rad
hectare	ha	1 ha = 10000 m^2 = 0.01 km^2
litro	l	1 l = 1 $dm^3 = (10^{-1}m)^3 = 10^{-3}\ m^3$
tonelada	t	1 t = 10^3 kg

1.4 Precisão - Viés - Exatidão

Os conceitos de precisão, viés e exatidão estão sempre presentes quando qualquer medida é obtida ou manipulada. A falta de uma noção clara desses conceitos resulta frequentemente em apresentações erradas de informação quantitativas e de interpretações enganosas das mesmas.

Precisão está diretamente relacionada com a proximidade de medidas sucessivas obtidas de um mesmo objeto. Suponhamos que o objeto em questão é o disco da secção transversal do tronco de uma árvore e que desejamos medir o diâmetro desse disco. Se utilizarmos uma régua graduada em centímetros e pedirmos para 10 observadores diferentes medirem o diâmetro do disco ao longo do mesmo eixo, obteremos 10 medidas que serão iguais até o nível de centímetros. Os milímetros não serão iguais

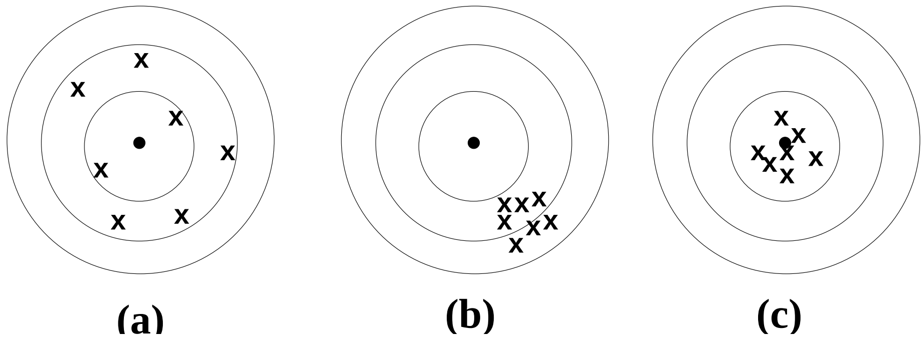

Figura 1.2: Representação gráfica dos conceitos de precisão, viés e exatidão, simulando o alvo de três atiradores diferentes. **(a)** apresenta um atirador com pequena precisão mas sem viés. Em **(b)** o atirado tem alta precisão mas apresenta um viés em relação ao centro do alvo. O alvo **(c)** é do atirador com precisão e sem viés, portanto, o atirador mais *exato*.

entre os medidores, pois a régua não está graduada nessa escala e permite o julgamento subjetivo de cada observador. Por outro lado, se a régua for graduada em milímetros, todos os observadores estarão em concordância a respeito do diâmetro do disco até a escala de milímetros e a subjetividade ou incerteza fica para a escala de décimos de milímetros. As medidas obtidas pelos diferentes observadores estarão mais próximas se a régua for graduada em milímetros que em centímetros. Portanto, a régua graduada em milímetros é *mais precisa*.

Viés é definido como um *desvio sistemático* do valor verdadeiro da medida. Voltemos ao caso do disco de madeira. Digamos que a régua graduada em milímetros foi construída com um defeito, o ponto "zero" da régua se encontra deslocado em 0.5 cm. Portanto, todas as medidas obtidas com ela se encontram sistematicamente deslocadas em 0.5 cm da medida verdadeira. Essa régua de milímetros ainda produz medidas mais precisas que a régua de centímetros, mas com um viés de 0.5 cm.

Por fim, exatidão é a qualidade que se busca em qualquer medida. Uma medida exata deve combinar alta precisão e ausência de viés. Portanto, uma medição exata implica que as medidas repetidas de um mesmo objeto não se distanciarão muito entre si e que todas elas variam ao redor do valor verdadeiro sem nenhuma tendência sistemática de se afastar desse valor, isto é, sem viés.

A figura 1.2 mostra uma representação dos conceitos de precisão, viés e exatidão. O alvo de três atiradores diferentes são apresentados em (a), (b) e (c). Em (a) o atirador tem pequena precisão pois os tiros se espalham por uma área relativamente ampla do alvo, mas ele não apresenta nenhum viés pois os tiros se distribuem ao redor da "mosca". Em (b) o atirado tem alta precisão pois os tiros se concentram numa pequena área do alvo, entretanto, o atirador ou sua arma tem um viés pois todos os tiros estão sistematicamente deslocados para a direita e para baixo da "mosca". O alvo (c) é do melhor atirador, pois ele possui tanto precisão como ausência de viés. Este é o atirador mais *exato*.

Capítulo 2
Algarismos Significativos

Ao medirmos um objeto, utilizamos múltiplos e frações de uma unidade de medida conforme a relação entre o tamanho do objeto e a escala. Por exemplo, ao medirmos o peso de um animal podemos dizer que ele pesa 254 kg. Isso seria equivalente a dizer que ele pesa 254000 g ou 0.254 Mg. Se utilizarmos kilogramas teremos um número com 3 algarismos antes do ponto decimal, se utilizarmos gramas teremos 6 algarismos antes do ponto decimal e se utilizarmos megagramas (Mg = toneladas) o número terá três algarismos depois do ponto decimal. Qual dos números é mais apropriado? Qual número representa a medida do peso com maior precisão?

Ora, o animal é o mesmo e seu peso um só. Se o método de medição foi o mesmo, o peso deve ser representado com uma só precisão, independentemente da unidade de medida escolhida para apresentá-lo. Portanto, os três números acima (254, 254000, 0.254) devem ter a mesma precisão e, consequentemente, nem todos os algarismos presentes neles têm a mesma relevância.

2.1 O que são Algarismos Significativos

Adotaremos aqui uma definição de algarismo significativo (AS) que não é totalmente correta do ponto de vista da Teoria dos Erros, mas que, sendo mais restrita que a definição tradicional, garante um alto grau de confiabilidade no tratamento de medidas.

> *Algarismos significativos são os algarismos numa medida que representam as posições do número (unidade, dezena, centena, milhar, etc.) que conhecemos com certeza absoluta, isto é, sem possibilidade de variação subjetiva.*

Se ao pesarmos o animal utilizamos uma balança com escala até kilogramas, teremos certeza que na medida 254 kg o 2 se refere à duas centenas de kilogramas, o 5 a cinco dezenas de kilograma e o 4 a quatro unidades de kilograma. Dois observadores fazendo a leitura na balança chegariam a estes mesmos três algarismos.

Se decidirmos expressar o peso em gramas, a balança graduada em kilogramas não nos permitirá distinguir, com certeza absoluta, animais com o pesos de 254300 g, 254020 g ou 254009 g. Em todos esses casos qualquer medida abaixo da escala de kilogramas seria subjetiva, variando de observador para observador. A conclusão é que a medida obtida nesta balança, seja ela expressa em kilogramas ou em gramas, tem apenas três algarismos significativos. Os três últimos dígitos que aparecem na medida em gramas não são confiáveis e a maneira apropriada de expressar o peso em gramas seria na forma de *notação científica*: $2.54 \times 10^5 g$.

Ao trabalharmos com medidas é importante manter em mente que uma mesma medida deve ser expressa com igual precisão independentemente do múltiplo ou fração da unidade escolhida para expressá-la. Não se deve fazer uma medida com mais AS que a precisão do instrumento de mensuração ou além da quantidade de AS que o processo de mensuração pode gerar com confiabilidade. Alguns exemplos:

- Se usarmos uma fita métrica para medir a circunferência do tronco de uma árvore, não devemos tomar como AS os algarismos além de centímetros, mesmo que a fita esteja graduada em milímetros. Quando a circunferência de uma árvore é medida mais de uma vêz por pessoas diferentes, ou até pela mesma pessoa, dificilmente as medidas serão coincidentes até a casa de centímetros.

- Ao utilizarmos um hipsômetro (instrumento utilizado para medir a altura de árvores), seria ilógico expressar a altura de uma árvore em centímetros, ainda que o hipsômetro permitisse registrar a altura com tal precisão. As condições de visualização da copa da árvore dentro de uma floresta (nativa ou plantada) e as condições atmosféricas (vento, iluminação) tornam a precisão de centímetros numa medida de altura de árvores totalmente irreal. A situação seria bem diferente se tivessemos medindo um poste de iluminação numa estrada.

- Para se comparar a produtividade de povoamentos florestais cuja as diferenças estão na ordem de metro cúbicos de madeira por hectare por ano (m^3/ha.ano), não faz sentido estimar a produtividade com precisão de decímetros cúbicos por hectare por ano (dm^3/ha.ano).

O uso de medidas com mais precisão que o necessário acarreta disperdício de tempo e dinheiro, portanto é importante adequar a precisão em termos de AS com a precisão necessária para se realizar um trabalho. Por exemplo, num levantamento florestal não é possível se medir todas as árvores, então somente algumas das árvores da floresta (uma amostra) serão medidas para se obter as informações desejadas. Não vale a pena obtermos uma amostra com algumas poucas árvores medidas com extrema precisão, pois existe na floresta uma variabilidade natural entre as árvores que torna irreal a alta precisão das medidas obtidas em algumas poucas árvores. De que adianta abatermos 10 árvores para podermos medir o volume delas com precisão de milimetros cúbicos, se estamos interessados no volume total de uma floresta com 1000 ha? Uma estimativa baseada num grande número de árvores (500), com menor precisão na medida de cada árvore individualmente, seria mais confiável e, portanto, mais útil.

2.2 Operações Aritméticas

Assim como não podemos aumentar ou reduzir a precisão de uma medida (aumentar ou reduzir a quantidade de AS) pela simples mudança da unidade de medida que utilizamos para expressá-la, não podemos arbitrariamente reduzir ou aumentar a quantidade de AS quando fazemos operações aritméticas com os valores das medidas.

2.2.1 Multiplicação e Divisão

Para se entender melhor a lógica por traz das regras relativas à quantidade de AS numa operação aritmética podemos imaginar que cada número é o centro de um intervalo com um algarismo a mais de precisão. Por exemplo, o número 457.8 seria o centro do intervalo $[457.75, 457.85]$, enquanto que o número 34.6 seria o centro de $[34.55, 34.65]$. O produto de 457.8 e 34.6 é

$$(457.8)(34.6) = 15839.88$$

Mas quantos algarismos nesse produto são de fato significativos? Vejamos o resultado dos produtos dos limites dos intervalos de cada um dos números:

$$\begin{aligned}
(457.75)(34.55) &= 15815.2625 \\
(457.75)(34.65) &= 15861.0375 \\
(457.85)(34.55) &= 15818.7175 \\
(457.85)(34.65) &= 15864.5025
\end{aligned}$$

Note que entre os quatro produtos, somente os três primeiros algarismos (1, 5 e 8) não variam. Portanto, no número 15839.88 apenas os três primeiros algarismos são significativos. Note ainda que 15839.88 é o centro do intervalo $[15815.26, 15864.50]$, obtido pela multiplicação dos extremos dos intervalos de 457.8 e 34.6. O número 457.8 tem quatro AS e o número 34.6 tem apenas três, o produto deles ficou com a menor quantidade de AS. Essa é a regra para multiplicação e divisão:

NA MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DE DOIS NÚMEROS, O RESULTADO TERÁ A MENOR QUANTIDADE DE AS PRESENTES ENTRE OS FATORES.

2.2.2 Adição e Subtração

No caso da adição ou subtração, a menor quantidade de AS à direita do ponto decimal é que define o resultado. Vejamos um exemplo:

$$\begin{array}{r}
1.013 \\
+11.5 \\
\hline
12.513
\end{array}$$

No resultado 12.513, temos certeza apenas que a soma 12.5 é correta pois desconhecemos os valores possíveis que possam existir depois do algarismo 5 no número 11.5. É importante não confundir 11.5 com 11.500. Essa incerteza dos centésimos e milésimos no número 11.5 faz com que no número 1.013 funcionem simplesmente como 1.0. Não há como saber o que foi somado à parte 0.013. Assim, a regra para adição e subtração é

> NA ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS,
> A QUANTIDADE DE AS APÓS O PONTO DECIMAL DO RESULTADO
> É DEFINIDA PELO FATOR COM MENOR PRECISÃO, ISTO É,
> COM A MENOR QUANTIDADE DE AS APÓS O PONTO DECIMAL.

2.2.3 Somatórias

Um outro cuidado importante na adição é não "inflacionarmos" o número de AS quando uma série de números é somada (somatória). Na somatória, os números da série têm em geral a mesma quantidade de AS, o que é diferente de uma simples adição. Mas como geralmente a série é longa, o resultado final tem ordem de grandeza maior que os elementos da série.

Vejamos um exemplo:

$$\begin{array}{r} 22.2 \\ 12.5 \\ 89.1 \\ 92.4 \\ \hline 216.2 \end{array}$$

O resultado 216.2 possui quatro algarismos e sua ordem de grandeza é de centena, enquanto todos os termos da série tem três AS e ordem de grandeza de dezena. O resultado não poderia ter mais do que três AS, porque, dessa forma, a simples operação de somar os números estaria aumentando a precisão do resultado. Portanto, o resultado final também tem três AS e deve ser expresso como 216.

> NA SOMA DE UMA SÉRIE DE NÚMEROS COM IGUAL QUANTIDADE DE AS
> O RESULTADO FINAL CONTINUARÁ TENDO A MESMA QUANTIDADE DE AS
> QUE OS ELEMENTOS DA SÉRIE.

2.2.4 Números com Precisão Infinita

O conceito de AS se aplica a números que representam medidas e, portanto, implicam num certo grau de incerteza quanto ao verdadeiro valor da medida. Entretatno, quando efetuamos operações cálculo, alguns números utilizados não são medidas e devem ser considerados como números com precisão infinita, isto é, com uma quantidade infinita de AS. Estes números são em geral de dois tipos:

Constantes Universais: os dois exemplos de constatnes mais comuns na área florestal são

$$\begin{aligned} \pi &= 3.141592654\ldots \\ e &= 2.718281828\ldots \end{aligned}$$

Estas constantes podem ser empregadas com quantos algarismos desejarmos representar e, para efeitos práticos, devem ser consideradas com precisão infinita.

Números Puros: são números que surgem nos cálculos mas não representam nem medidas, nem constantes. Por exemplo, para obtermos a média da série de números 22.2, 12.5, 89.1 e 92.4, temos que dividir 216.2 por 4. Nesse caso, 4 é um número puro pois representa o tamanho da série e, consequentemente, tem precisão infinita. Quantos AS possui a média desta série?

$$\left.\begin{array}{r} 22.2 \\ 12.5 \\ 89.1 \\ 92.4 \\ \hline 216.2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{216.2}{4} = 54.05$$

Cada elemento da série tem 3 AS, consequentemente o resultado final da somatória também tem 3 AS. O número 4 que divide o resultado final tem precisão infinita, portanto, a média deve permanecer com 3 AS. A maneira correta de expressar a média, portanto, seria 54.0.

NÚMEROS COM PRECISÃO INFINITA NÃO ALTERAM A QUANTIDADE DE AS DO RESULTADO DAS OPERAÇÕES ARITMÉTICAS.

2.2.5 Quando Manter apenas os AS num Número?

Os AS são importantes quando apresentamos *resultados finais* de análises quantitativas. Durante as operações aritméticas não devemos arredondar os números a todo momento para mantermos somente os AS, pois os problemas de arredondamento acarretariam em AS incertos no resultado final. Para evitar esse tipo de problema, devemos deixar os números, durante a fase de cálculo, com tantos algarismos quanto a calculadora ou computador conseguir armazenar. Somente o resultado final é que deve ser arredondado para apresentar somente os algarimos significativos.

2.3 Arredondamento

O arredondamento de uma medida ou número é o processo de desprezar ou descartar alguns algarismos de modo a manter apenas os algarismos representativos ou expressar o número com um certo grau de precisão. A apresentação do resultdo de operações matemáticas deve sempre ser fiel à quantidade de AS apropriada e, portanto, todos os algarismos não significativos devem ser descartados no resultado final. A regra de arredondamento envolve três casos:

1. Os algarismos a serem desprezados representam menos que $1/2$ da posição decimal do último algarismo significativo. Nesse caso, o último algarismo significativo não é alterado. Por exemplo:

15.349	arredondado para décimos fica	15.3	pois	$0.049 < 0.050$
$73526.$	arredondado para centena fica	$73500.$	pois	$26 < 50$

2. Se os algarismos a serem descartados representam mais que $1/2$ da posição decimal do último algarismo significativo, esse algarismo é acrescido de uma unidade. Por exemplo:

26.768	arredondado para centésimos fica	26.77	pois	$0.008 > 0.005$
$107982.$	arredondado para milhar fica	$108000.$	pois	$982 > 500$

3. Quando os algarismos a serem rejeitados são exatamente iguais a $1/2$ da posição decimal do último algarismo significativo, utiliza-se o seguinte protocolo:

   (a) Se o último algarismo significativo for PAR ele permanece inalterado;

   (a) Se o último algarismo significativo for IMPAR ele é acrescido de uma unidade.

   Alguns exemplos desse caso:

26.765	arredondado para centésimos fica	26.76	pois	6 é par	
26.735	rredondado para centésimos fica	$26..74$		pois	3 é impar
$107500.$	arredondado para milhar fica	$108000.$		pois	7 é impar
$108500.$	arredondado para milhar fica	$108000.$		pois	8 é par

Vejamos alguns exemplos de como a representação de um número varia de acordo com a quantidade de AS:

Número	Arredondamento para		
Original	4 AS	3 AS	2 AS
3.5745	3.574	3.57	3.6
0.0997081	0.09971	0.0997	0.10
64.7295	64.73	64.7	65
2.0495	2.050	2.05	2.0
284867	2.849×10^5	2.85×10^5	2.8×10^5

2.3.1 O Zero e suas Posições

Note que na última linha da tabela acima, o número 284867 quando arredondado para 4 AS foi apresentado na forma 2.849 $\times 10^5$. Por que, não foi apresentado na forma: 284900 ? A convenção dita que o 0 (zero) quando apresentado como último algarismo *à direita* de uma sequência de algarismos não nulos *é considerado significativo*. Assim a apresentação do número 284900 implica que ele possui 6 algarismos significativos, os quatro primeiros não nulos mais os dois últimos zeros. Desta forma é necessário utilizar o recurso da *notação científica*, multiplicando o número por 10^k quando a quantidade de AS é inferior à quantidade de casas antes do ponto decimal.

Por outro lado, o número 0.0997081 da tabela acima, quando arredondado para 4 AS foi apresentado como 0.09971. Por que ele não foi apresentado como 0.0997?

Também pela convenção de representação de AS, o 0 (zero) à esquerda de uma sequência de algarismos não é considerado significativo, antes ou depois do ponto decimal. Assim os dois zeros no número 0.09971 só indica a posição dos AS deste número em relação ao ponto decimal. Este número poderia igualmente ser representado como 9.971 $\times 10^{-2}$.

O ZERO À DIREITA DE UMA SEQUÊNCIA DE ALGARISMOS É AS, O ZERO À ESQUERDA NUNCA É SIGNIFICATIVO.

2.4 Uma Aplicação de AS

Em geral, a produção de madeira de uma floresta é expressa em termos de volume (m^3). O volume de árvores individuais pode ser obtido a partir de medidas do diâmetro e da altura do tronco da árvore. Surge uma questão: ao calcularmos o volume do tronco, o que influencia mais o volume obtido: um erro de mensuração do diâmetro ou erro da altura do tronco?

Suponhamos que o tronco seja *perfeitamente cilíndrico* e tenha diâmetro $d = 15cm$ e altura $h = 20m$. Utilizando a fórmula do cilindro:

$$v = g\,h = \left(\frac{\pi}{40000}\right) d^2\,h$$

onde g é a área da base do cilindro, obtemos:

$$\begin{aligned} v &= \left(\frac{\pi}{40000}\right)(15)^2\,20 \\ &= (0.00007854)\,(225)\,(20) \\ &= 0.3534 \end{aligned}$$

Expressando o volume obtido com os AS apropriados temos $v = 0.35m^3$.

Imaginemos agora que o diâmetro foi erroneamente medido, sendo que o valor obtido foi de $d' = 14cm$:

$$\begin{aligned} v' &= g'\,h = \left(\frac{\pi}{40000}\right) d'^2\,h \\ &= \left(\frac{\pi}{40000}\right)(0.14)^2\,20 \\ &= (0.00007854)\,(196)\,(20) \\ &= 0.3079 \approx 0.31m^3 \end{aligned}$$

O erro no volume foi de $0.04m^3$ o que representa um erro percentual de

$$\frac{0.35 - 0.31}{0.35}\;100 = 11\%.$$

Como o diâmetro (d) entra ao quadrado no cálculo do volume, um erro de $1cm$ em $15cm$, que correspondente a 6.7% do diâmetro, gerou um erro de 11% no volume.

Qual o erro na medição de altura necessário para gerar o mesmo erro de 11% no volume? Vejamos qual seria a altura obtida quando $v' = 0.31m^3$ e $d = 15cm$:

$$\begin{aligned} v' &= g\,h' \Longrightarrow h' = v'/g \\ h' &= \frac{v'}{(\pi/40000)d^2} \\ &= 0.3079/\left[(0.00007854)(225)\right] \\ &= 17.4235 \approx 17m \end{aligned}$$

Portanto, para se gerar um erro de 11% no volume seria necessário um erro de $3m$ em $20m$, ou um erro de 15% na medição da altura.

Ao medirmos um árvore, o que é mais fácil ocorrer: um erro de $1cm$ na medição do diâmetro ou um erro de $3m$ na medição da altura?

CAPÍTULO 3

DIÂMETRO E ÁREA SECCIONAL

As árvores e arbustos são plantas com forma de vida caracterizada pela a presença de um caule lenhoso (tronco) e um sistema de ramos lenhosos que sustenta as folhas. As árvores são geralmente diferenciadas dos arbustos por serem mais altas e, na fase adulta da vida, possuírem um tronco único livre de ramos até pelo menos uma altura de 2 m. As principais função do sistema lenhoso (tronco e ramos) são a sustentação da planta e a translocação das seivas bruta e elaborada. Tais funções implicam que nas árvores e arbustos existe uma relação direta entre o tamanho da planta e o tamanho do sistema lenhoso. Particularmente nas árvores, o tamanho do tronco tem uma forte relação com o tamanho da árvores como um todo: ramos, folhas e até mesmo o sistema radicular.

O diâmetro do tronco é a medida mais simples do tamanho das árvores, sendo frequentemente utilizado para classificá-las em classes de tamanho. Apesar da simplicidade de sua medida, cuidados e padronização dos procedimentos de mensuração se fazem necessários. Existe uma grande variação na forma do tronco das árvores e a simples referência a uma "medida de diâmetro" pode significar diferentes informações biológicas da planta se uma convenção não for seguida. Este capítulo trata da medição de diâmetro em termos da convenção utilizada nas Ciências Florestais, assim, para os diferentes profissionais florestais, "medir o diâmetro" de uma árvore significa uma única coisa.

3.1 Medindo o Diâmetro

O DAP é a medida do diâmetro do tronco de árvores tomada a 1.30 m de altura, por isso o nome "**D**iâmetro à **A**ltura do **P**eito". Na verdade à "altura do peito" pode variar dependendo de condições particulares de certas árvores. A figura 3.1 mostra como proceder a medição do DAP em alguns casos particulares.

A forma mais simples de se medir o DAP é medir o perímetro ou circunferência do tronco (CAP) e convertê-la para diâmetro, assumindo que a secção transversal do tronco à altura do peito é perfeitamente circular:

$$DAP = \frac{CAP}{\pi}$$

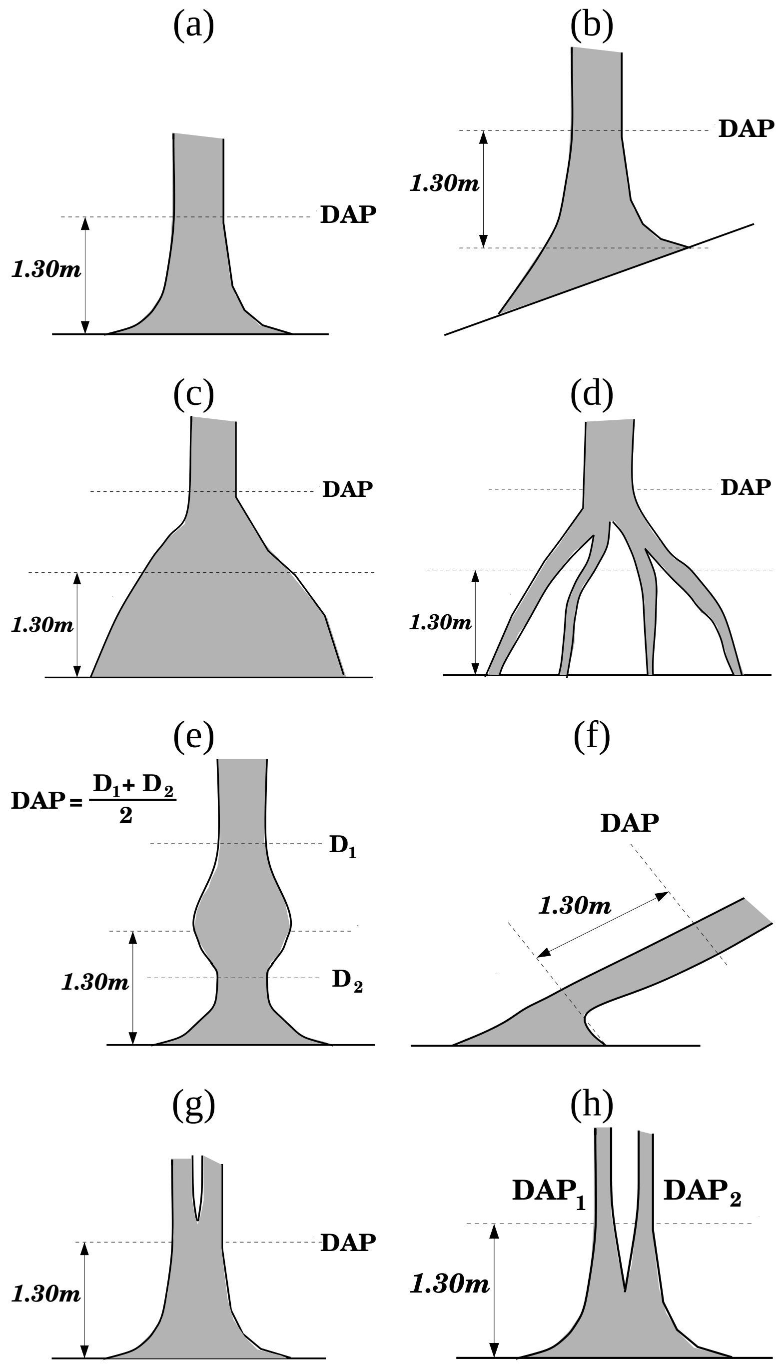

Figura 3.1: Procedimento adequado na medição do DAP em casos particulares: (a) na situação convencional; (b) em encosta muito íngremes, toma-se a altura de $1.30m$ a montante da árvore; (c) com sapopemas basais altas, o DAP só é medido quando a influência das sapopemas desaparece no tronco; (d) o mesmo com raízes altas; (e) com expansão do tronco a $1.30m$, o DAP é a média de medidas acima e abaixo; (f) em árvores muito inclinadas o DAP é tomado na distância de $1.30m$ ao longo do tronco; (g) bifurcação acima de $1.30m$ implica em um único fuste; (h) bifurcação abaixo de $1.30m$ implica em dois fustes e, consequentemente, em dois DAP para uma mesma árvore.

Esta medida indireta do DAP pode ser feita com uma simples fita métrica, embora, os Engenherios Florestais também utilizem a "fita dendrométrica", que é uma fita na qual cada marca de 1 cm da escala corresponde na verdade a π (3.141592654…) centímetros.

O DAP também pode ser medido diretamente utilizando o "compasso florestal" ou "suta", que nada mais é que um grande paquímetro. Para contornar problemas de irregularidade da secção do tronco à altura do peito, é praxe se tomar duas medidas de diâmetro com a suta, uma medida perpendicular a outra, buscando-se tomar a maior (d_M) e menor(d_m) medida de diâmetro. Nesse caso, o DAP é obtido pela média das duas medidas:

$$DAP = \frac{d_M + d_m}{2}$$

3.2 Área Seccional e Volume de Troncos

Embora o diâmetro seja a medida efetivamente tomada do tronco das árvores, a *área seccional* é uma medida de interpretação biológica e dendrométrica mais direta e, portanto, de utilização mais fácil. A área seccional é definida como a área da secção transversal do tronco de uma árvore à altura de 1.30 m, sendo *sempre* calculada pela fórmula:

$$g = \left(\frac{\pi}{4}\right) d^2$$

onde d é o DAP, independentemente da forma como ele foi medido (suta ou fita), e g é a área seccional do tronco.

Na fórmula acima, se o DAP está em cm a área seccional será calculada em cm^2, caso esteja em m, a área será obtida em m^2. O DAP é geralmente apresentado em cm, mas a área seccional frequentemente é expressa em m^2. Para obtermos uma fórmula que faça a conversão automaticamente, devemos dividir o DAP em cm por 100, convertendo-o para m:

$$g = \frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{100}\right)^2 = \frac{\pi}{4}\left(\frac{d^2}{10000}\right) \Longrightarrow g = \left(\frac{\pi}{40000}\right) d^2$$

Doravante, utilizaremos sempre esta última expressão, pois assumiremos que o DAP (d) será sempre apresentado em cm e a área seccional (g) em m^2.

Em se tratando de árvores individuais, a principal razão dendrométrica para o uso da área seccional é a relação direta desta com o volume de madeira do tronco. Genericamente, o volume do tronco (v) de uma árvore pode ser definido pela seguinte função:

$$v = g\, h\, f$$

onde g é área seccional; h é a altura e f a forma do tronco. Em termos de DAP esta função se torna:

$$v = \left(\frac{\pi}{40000}\right) d^2\, h\, f$$

Um aumento *relativo* no volume da árvore resultará sempre de um aumento proporcional relativo da área seccional (g), da altura (h) e da forma (f):

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta f}{f}$$

mas no caso do diâmetro, o aumento relativo do diâmetro resulta numa aumento 2 vêzes proporcional do volume:

$$\frac{\Delta v}{v} = 2\left(\frac{\Delta d}{d}\right) + \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta f}{f}$$

Vejamos um exemplo abaixo. Em 1990 uma árvore possuía:

d = 39 cm $\rightarrow$ g = 0.120 m^2
h = 40 m
f = 0.5
logo, seu volume era $v = (0.120)(40)(0.5) = 2.4$ m^3.

Entre 1990 e 1992:

o d cresceu para 41 cm $\rightarrow$ Δd = 2 cm $\approx$ 5%
a g cresceu para g = 0.132 $\rightarrow$ Δg = 0.012 m^2 $\approx$ 10%
a h cresceu para 44 m $\rightarrow$ Δh = 4 m $\approx$ 10%
a f permaneceu inalterada.

Em 1992, o volume ficou $v = (0.132)(44)(0.5) = 2.9$ m^3 $\rightarrow$ Δv = 0.5 m^3 $\approx$ 20%

$$\begin{aligned} \Delta v &\approx \Delta g + \Delta h + \Delta f \\ \Delta v &\approx 10\% + 10\% + 0\% = 20\% \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \Delta v &\approx 2(\Delta d) + \Delta h + \Delta f \\ \Delta v &\approx 2(5\%) + 10\% + 0\% = 20\% \end{aligned}$$

A importância biológica da área seccional se fundamenta na sua relação com a superfície no tronco destinada à translocação das seivas entre a copa e o sistema radicular. Desta forma, ela representa uma medida biológica indireta do tamanho da árvore e possui relação direta com:

- a superfície foliar da copa da árvore, o que implica na superfície fotossintetizante da árvore;

- a área de projeção horizontal da copa, que é uma medida da ocupação do “espaço de crescimento” pela árvore.

3.3 DAP e Cálculo da Área Seccional

A área seccional de uma árvore é sempre calculada pela equação:

$$g = \left(\frac{\pi}{40000}\right) d^2$$

onde d é o DAP da árvore (em centímetros). Esta equação assume que a área seccional tem formato circular em relação ao DAP, o que raramente é verdadeiro.

Uma aspecto importante na mensuração do DAP é saber se a mensuração direta com a suta e a mensuração indireta por fita são igualmente válidas para o cálculo da área seccional. Para uma análise teórica, devemos estabelecer o modo pelo qual a secção transversal do tronco se diferencia do círculo. A forma mais simples é assumirmos que a secção tende a se tornar eliptica. Neste caso, a análise teórica revela que ambos os métodos (suta ou fita métrica) tendem a *superestimar* o valor da área seccional, mas a superestimativa da fita é maior que a da suta, com a diferença entre as duas aumentando à medida que a secção se torna mais elíptica. Vejamos alguns exemplos:

3.3.1 Exemplo A

A árvore com secção elíptica: diâmetros $d_M = 35$ cm e $d_m = 20$ cm.

- Área seccional correta:

$$g_{\text{ELIPSE}} = \left(\frac{\pi}{40000}\right) d_M\, d_m = (0.00007854)(35)(20) = 0.055 \text{ m}^2$$

- Área seccional media com fita:

$$\begin{aligned} d_F &= \frac{c}{\pi} = \sqrt{\frac{d_M^2 + d_m^2}{2}} = \sqrt{\frac{35^2 + 20^2}{2}} = 28.50 \text{ cm} \\ g &= \left(\frac{\pi}{40000}\right) {d_F}^2 = (0.00007854)(28.5)^2 = 0.0638 \\ &\approx 0.064 m^2 \end{aligned}$$

  Erro de 0.009 m^2 ou 16%.

- Área seccional media com suta:

$$\begin{aligned} d_S &= \frac{d_M + d_m}{2} = \frac{35 + 20}{2} = 27.50 \text{ cm} \\ g &= \left(\frac{\pi}{40000}\right) {d_S}^2 = (0.00007854)(27.50)^2 = 0.0594 \\ &\approx 0.059 m^2 \end{aligned}$$

  Erro de 0.004 m^2 ou 7%.

Note que se os resultados parciais dos DAP forem arredondados para o número correto de AS teremos d_F = 28 cm e d_S = 28 cm, desaparecendo a diferença.

3.3.2 Exemplo B

A árvore com secção elíptica: diâmetros $d_M = 35$ cm e $d_m = 10$ cm.

- Área seccional correta:

$$g_{\text{ELIPSE}} = \left(\frac{\pi}{40000}\right) d_M\, d_m = (0.00007854)(35)(10) = 0.028 \text{ m}^2$$

- Área seccional media com fita:

$$\begin{aligned} d_F &= \frac{c}{\pi} = \sqrt{\frac{d_M^2 + d_m^2}{2}} = \sqrt{\frac{35^2 + 10^2}{2}} = 27.54 \text{ cm} \\ g &= \left(\frac{\pi}{40000}\right) {d_F}^2 = (0.00007854)(27.54)^2 = 0.0520 \\ &\approx 0.052 m^2 \end{aligned}$$

  Erro de 0.024 m^2 ou 89%.

- Área seccional media com suta:

$$\begin{aligned} d_S &= \frac{d_M + d_m}{2} = \frac{35 + 10}{2} = 22.50 \text{ cm} \\ g &= \left(\frac{\pi}{40000}\right) {d_S}^2 = (0.00007854)(22.50)^2 = 0.0398 \\ &\approx 0.040 m^2 \end{aligned}$$

  Erro de 0.012 m^2 ou 46%.

Neste caso, mesmo arredondando os valores de DAP para o número correto de AS persiste a diferença. De qualquer forma, o erro produzido pelo método da suta ainda é muito grande.

Em termos práticos, a diferença entre os dois métodos dificilmente é verificada no campo. Em primeiro lugar, porque as árvores raramente tem uma forma tão elíptica ao ponto da diferença ser detectável. Em segundo lugar, quando as árvores não possuem a secção transversal circular é porque o formato é muito irregular, não elíptico, e os dois métodos produzem estimativas igualmente questionáveis. Isso ocorre com frequência em florestas tropicais, onde algumas espécies são famosas pelos seus troncos com formatos exóticos.

A Área do Círculo no Egito Antigo

O Egito Antigo é famoso pelas suas pirâmides e o mistério que envolve a sua construção. A pirâmide de Queops ainda é envolta por um mistério ainda maior, pois a relação entre a sua altura e o seu perímetro da base se aproxima bastante de 2π. Entretanto, historiadores afirmam que a constante π era desconhecida no Egito Antigo*

*Veja Boyle, C.B. 1991 *A History of Mathematics*. New York: John Wiley & Sons, p.17.

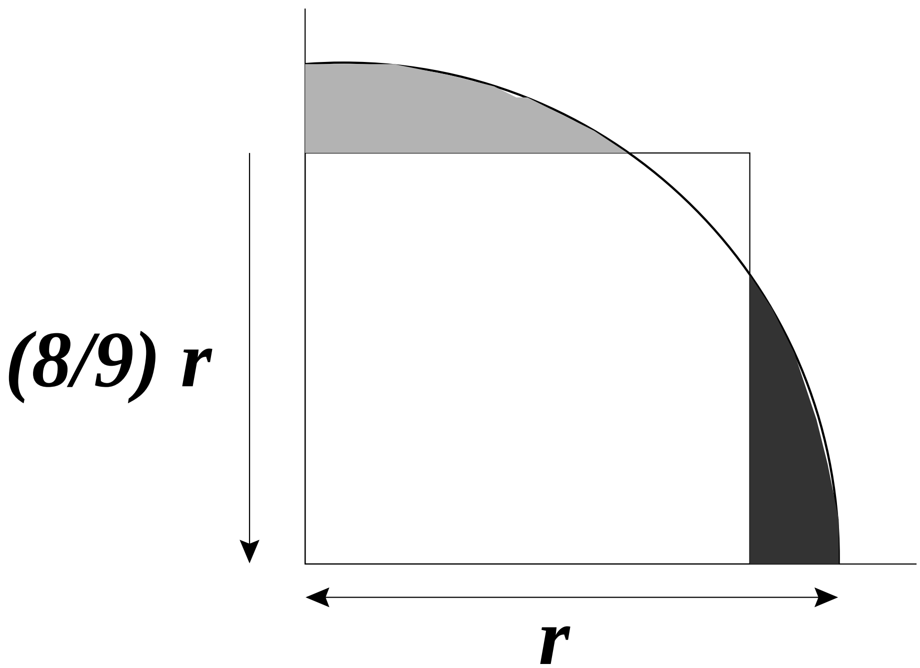

Figura 3.2: Esquema da aproximação utilizada no Egito Antigo para cálculo da área do círculo.

O cálculo da área do círculo era feito através de uma aproximação que pode ser representada pela seguinte figura 3.2. A aproximação consistia em tomar a área de $1/4$ do círculo de raio r como igual à área do quadrado de lado $(8/9)r$. Portanto, a área do círculo com raio r seria:

$$4\left(\frac{8}{9}\,r\right)^2 \quad = \quad 4\left(\frac{8}{9}\right)^2 r^2 = \left(\frac{256}{81}\right) r^2$$

sendo a aproximação para π igual a $256/81$ ou 3.1605. Comparando esse valor com $\pi = 3.1416$ temos um erro de

$$\frac{3.1605 - 3.1416}{3.1416} \times 100 = 0.6\%,$$

o que mostra que as regras práticas utilizadas pelos antigos podem alcançar incrível nível de exatidão.

CAPÍTULO 4
MENSURAÇÃO DE ALTURAS

São duas as razões principais para a medição da altura de árvores individuais. Primeiro, a determinação direta do volume de madeira em árvores em pé é muito difícil e demorada, o que faz com que os métodos indiretos baseados em medições do diâmetro (d) e da altura sejam os mais utilizados. Segundo, a altura total de uma árvore, seja em florestas nativas ou florestas plantadas, é uma forte indicação do "status" dessa árvore na dinâmica da competição entre as árvores do povoamento. Árvores baixas, em relação à altura da floresta, estão sombreadas por outras árvores e podem ter o seu crescimento e desenvolvimento prejudicado, ou então são árvore típicas do sub-bosque. As árvores altas tem posição priveligiada em relação à luz solar, o que permite maior crescimento e menor possibilidade de mortalidade. A altura das árvores mais altas da floresta define o "dossel", ou linha contínua imaginária que delimita o topo da floresta. Somente algumas poucas árvores, chamadas de emergentes, possuem a sua copa acima do dossel.

4.1 Altura de Árvores Individuais

Quando falamos da altura de uma árvore, normalmente nos referimos à altura total, mas existem outras alturas que têm significado biológico ou importância dendrométrica. A figura 4.1 mostra diversas alturas que podem ser tomadas em árvores individuais.

Altura Total (h): distância entre a base da árvore e a ponta do ramo mais alto (figura 4.1 a e b). Esta é a altura mais utilizada em dendrometria, pois é menos sujeita a diferenças de interpretação entre observadores uma vez que o ponto mais alto de uma árvore independe da arquitetura da árvore.

Altura Comercial (h_c): Em árvores monopodiais, é a altura onde o tronco atinge o diâmetro mínimo comercial (d_{min}) (figura 4.1 (a)).

Em árvore simpodiais, essa altura representa a distância do solo até a base da primeira bifurcação do tronco (figura 4.1 (b)). Na maioria das espécies arbóreas tropicais crescendo em condições de floresta nativa, h_c representa o comprimento do tronco útil para serraria. Em algumas espécies, a altura da primeira

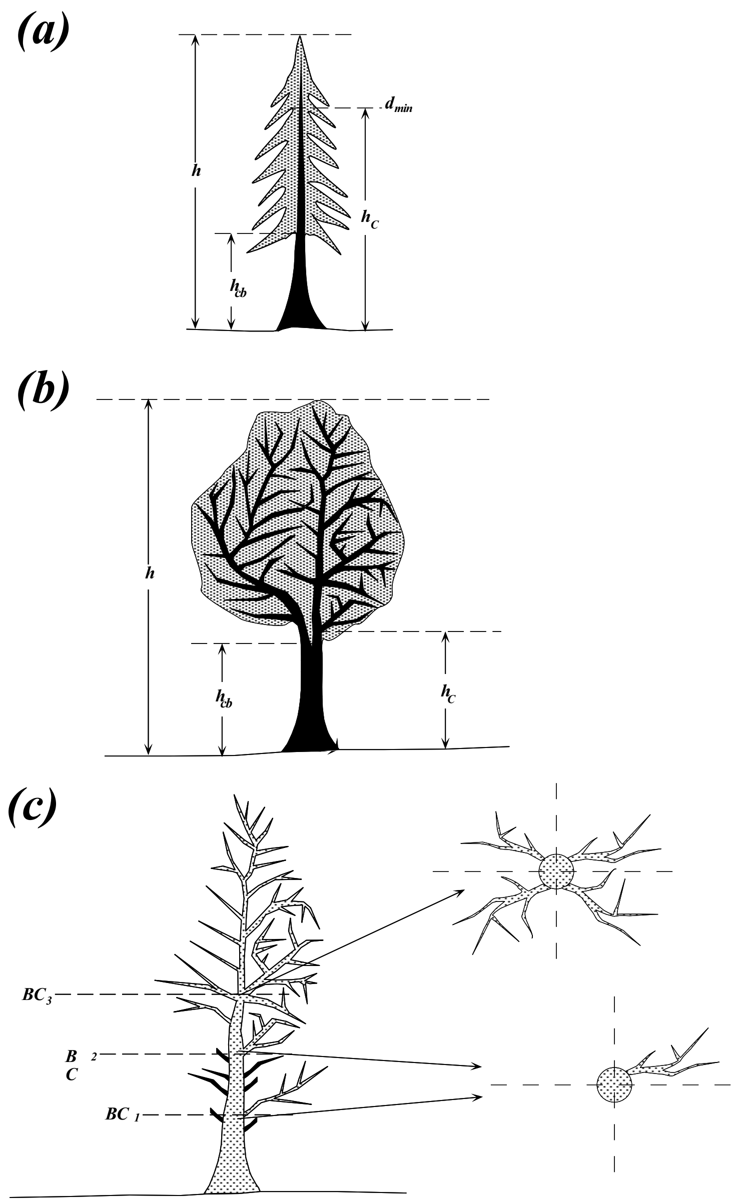

Figura 4.1: Diferentes alturas tomadas em árvores individuais. (a) Alturas em árvores monopodiais: h - altura total; h_{cb} - altura da base da copa; h_c - altura comercial, altura até o diâmetro mínimo (d_{min}) comercial. (b) Alturas em árvores simpodiais: h e h_{cb} como no caso anterior; h_c - altura comercial, altura até a primeira bifurcação do tronco. (c) Definições alternativas da base da copa em árvores monopodiais: BC_1 - primeiro ramo vivo; BC_2 - primeiro ramo vivo contíguo, isto é, acima do qual todos ramos são vivos; BC_3 - primeiro verticilo com ramos projetados nos quatro quadrantes.

bifurcação pode ser tão baixa que os vários fustes existentes são úteis para serraria e, para fins de medição, devem ser tratados como árvores individuais.

Atura da Base da Copa (h_{cb}): é a altura até a base da copa da árvore (figura 4.1 (a) e (b)). Para árvores crescento sem competição, h_{cb} pode ser igual a h, mas nas florestas nativas e plantadas o sombreamento dos ramos inferiores estimula as árvores a descartá-los (desrama natural), havendo um recuo da base da copa à medida que as árvores crescem em altura. Em florestas homogêneas coetâneas (árvores com a mesma idade), o processo de recuo da base da copa é chamado de "retrocesso de copa", sendo o primeiro sinal do estabelecimento da competição entre as árvores.

A definição da base da copa depende das implicações biológicas ou tecnológicas que a medida de h_{cb} pretende ter (figura 4.1 (c)).

a. A base da copa pode ser definida como o ponto de inserção do primeiro ramo vivo (BC_1 na figura 4.1 (c)). Do ponto de vista tecnológico, essa altura de copa indica o comprimento do tronco livre de nós vivos, enquanto que do ponto de vista biológico ela indica o ponto mais baixo que a copa alcança na árvore.

b. Outra definição da base da copa é o ponto de inserção do primeiro ramo vivo acima do qual todos os demais ramos também são vivos (BC_2 na figura 4.1 (c)). Essa definição procura contornar o problema do desenvolvimento de ramos próximos à base da árvore devido a estresse.

c. Por fim, a base da copa pode ser definida como o ponto onde existe inserção de ramos vivos em todos quadrantes (BC_3 na figura 4.1 (c)). Em espécies com inserção de ramos na forma de nós e entrenós, esta é a definição fisiologicamente mais adequada. Em espécies intolerantes, esta definição também indica o ponto a partir do qual a copa recebe luz de todas as direções.

4.2 Métodos Geométricos de Mensuração

Os métodos geométricos de mensuração de altura se baseiam em semelhança de triângulos e, dada a sua simplicade, permitem a construção de instrumentos simples e práticos. A precisão e velocidade de medição com tais instrumentos, no entanto, são pequenas, limitando o seu uso em levantamentos florestais profissionais.

4.2.1 Prancheta Dendrométrica

A prancheta dendrométrica é talvez o hipsômetro (instrumento de medição de altura de árvores) mais simples e de maior facilidade de construção. A figura 4.2 mostra a sua estrutura, composta basicamente de uma tábua e de um pêndulo.

As visadas da árvore a ser medida são feitas tomando-se a borda superior da prancheta, onde o pêndulo está preso, como uma "mira". Ao se visar o topo da árvore (figura 4.3) ocorre a formação do triângulo ABC e, ao mesmo tempo, o pêndulo da prancheta gera

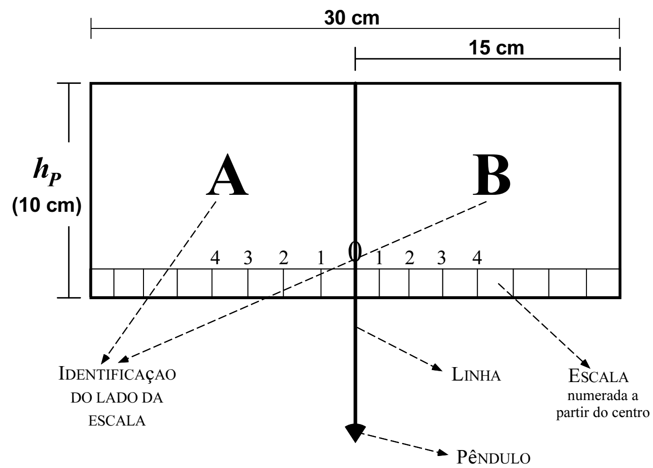

Figura 4.2: Estrutura da prancheta dendrométrica. Material para construção: uma tábua de 30 × 10 cm, a escala em papel milimetrado e o pêndulo formado de linha e peso.

o triângulo $A'B'C'$. A formação destes dois triângulos é interdependente fazendo com que os ângulos de ambos sejam iguais e, portanto, os triângulos sejam semelhantes. A semelhança dos triângulos garante a igualdade da razão dos lados correspondentes:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{A'C'}} \qquad \Longrightarrow \qquad \overline{BC} = \overline{AC}\,\frac{\overline{B'C'}}{\overline{A'C'}}$$

Os lados utilizados nesta relação são prontamente obtidos por medidas tomadas no campo:

$\overline{BC}$ é a altura h_1 a ser determinada, isto é, a altura da árvore a partir da linha horizontal imaginária que passa pelos olhos do observador.
$\overline{AC}$ é a distância do observador à arvore (D_{OA}). Note que essa distância é a distância horizontal e pode diferir da distância medida sobre o terreno em situações de topografia acidentada.

$\overline{B'C'}$ é a distância percorrida pelo pêndulo da prancheta dendrométrica (l_1) quando esta é inclinada para se fazer a visada do topo da árvore. Esta distância é lida diretamente na escala da prancheta e por isso a escala da prancheta é graduada do centro para as pontas, uma vêz que o pêndulo descansa na posição central quando a prancheta está perfeitamente horizontal,

$\overline{A'C'}$ é a altura da prancheta (h_P), que em geral é de 10 cm.

A partir desta interpretação obtemos a fórmula da prancheta dendrométrica:

$$h_1 \quad = \quad D_{OA}\,\frac{l_1}{h_P}$$

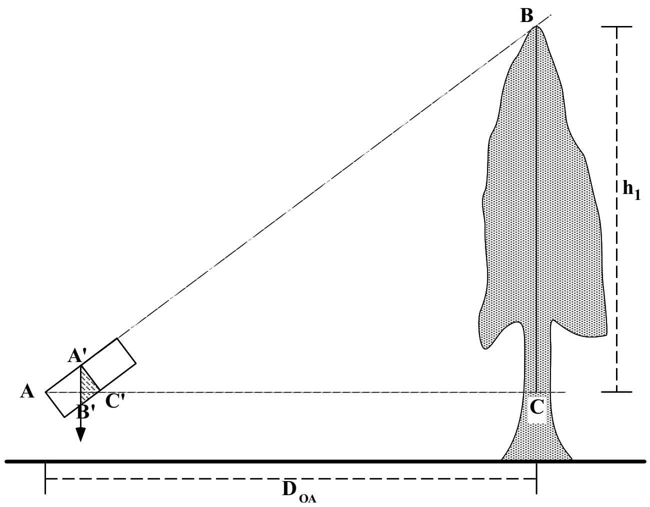

Figura 4.3: Funcionamento da prancheta dendrométrica quando é realizada uma visada do topo da árvore.

Tomando-se l_1 e h_P na mesma unidade de medida (centímetros) a razão l_1/h_P fica sem unidades e a altura h_1 é obtida na mesma unidade da distância D_{OA} (metros).

Para se determinar a altura total da árvore faz-se uma segunda visada da base da árvore, pois h_1 mede a altura da árvore a partir da linha horizontal a partir do olho do observador. As irregularidades do terreno tornam o procedimento da segunda visada mais seguro que a simples adição da altura do olho do observador à h_1. Em condições de campo, os pés do observador dificilmente estarão na mesma altura horizontal da base da árvore.

Na visada da base da árvore o mesmo processo de formação de triângulo se forma (figura 4.4) e a altura h_2 da linha horizontal para base da árvore é acompanhada de uma segunda leitura l_2 na prancheta dendrométrica.

A altura total, portanto, é obtida pela soma de h_1 e h_2 e a fórmula da prancheta dendrométrica fica:

$$h \quad = \quad h_1 + h_2 = D_{OA} \, \frac{l_1 + l_2}{h_P}$$

como h_P é normalmente 10 cm, na determinação da altura no campo se deve utilizar distâncias "redondas" para se facilitar os cálculos. As distâncias observador-árvore geralmente utilizadas são 15, 20, 30 e 40 m.

4.2.2 Hipsômetro de Weise

O hipsômetro de Weise é uma prancheta dendrométrica aperfeiçoada. A apresentação se torna mais sofisticada com a substituição da tábua por um tubo de metal com mira

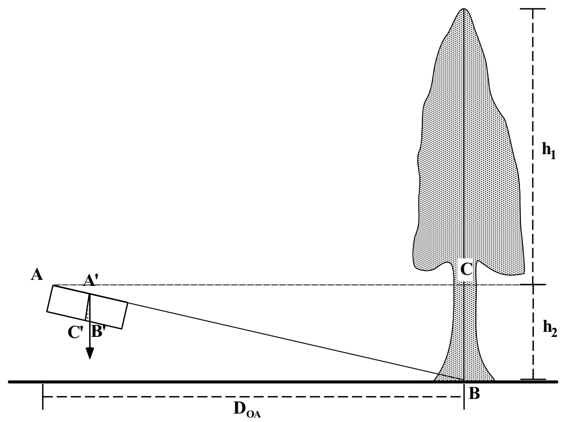

Figura 4.4: Funcionamento da prancheta dendrométrica quando é realizada uma visada da base da árvore.

demarcada e com a colocação de um pêndulo metálico que ocila menos com o vento (figura 4.5).

A vantagem em usar este hipsômetro é tornar a altura do pêndulo ajustável, o que torna possível a leitura da altura diretamente na escala, sem a necessidade de cálculo. Voltando à fórmula da prancheta (fórmula acima), notamos que se a altura h_P for ajustada para se igualar numericamente à distância D_{OA}, a altura da árvore será obtida pela soma das leituras: $h = l_1 + l_2$. O mesmo princípio de simplificação das unidades de medidas se aplica aqui: as leituras em centímetros cancelam a altura h_P em centímetros e altura é dada na unidade de medida da distância D_{OA} em metros. Na verdade, a escala das leituras e a escala da altura do pêndulo não precisam necessáriamente ser em centímetros, basta que tenham a mesma unidade de medida.

4.2.3 Hipsômetro de Christen

A originalidade deste hipsômetro é poder medir a altura da árvore sem necessidade de medir a distância do observador à árvore. Ele é composto de uma régua e uma baliza de altura conhecida. Ao se medir a altura de uma árvore, a baliza é colocada junto a ela e o observador se posiciona de tal forma que toda a árvore, da base ao topo, seja visualizada como "encaixada" no comprimento total da régua (figura 4.6). Nessa posição o observador lê a altura da árvore pela posição da baliza na escala da régua.

Quando o observador se posiciona no ponto correto de visualização, formam-se quatro triângulos, semelhantes dois-a-dois (figura 4.6). A semelhança entre os triângulos ABC e $AB'C'$ estabelece a seguinte relação de lados:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{B'C'}} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

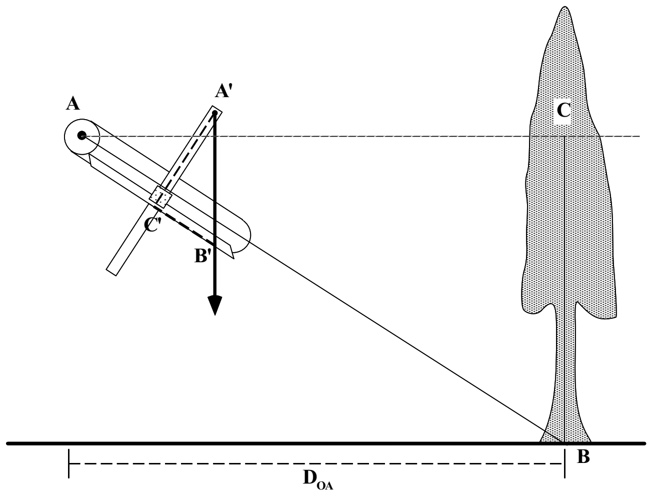

Figura 4.5: Funcionamento do hipsômetro de Weise. A semelhança de triângulos é a mesma que ocorre na prancheta dendrométrica, mas no hipsômetro de Weise a altura do pêndulo ($\overline{A'C'}$) é ajustável.

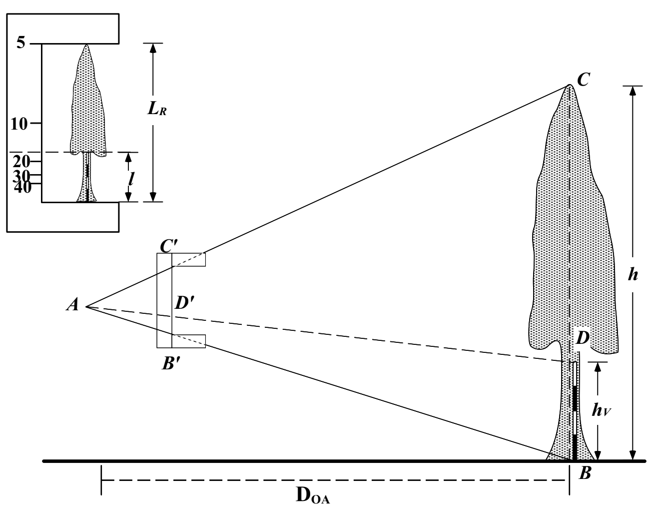

Figura 4.6: Funcionamento do hipsômetro de Christen, que utiliza uma régua para encaixe visual da árvore e uma baliza de altura conhecida. A fórmula deste hipsômetro é obtida com base em duas semelhanças de triângulos: entre os triângulos ABC e $AB'C'$ e entre os triângulos ABD e $AB'D'$.

enquanto que pela semelhança entre os triângulos ABD e $AB'D'$ temos a relação:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{B'D'}} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{B'D'}}$$

Igualando-se essas duas expressões obtemos:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{B'D'}} \qquad \Longrightarrow \qquad \overline{BC} = \overline{BD}\frac{\overline{B'C'}}{\overline{B'D'}}$$

onde cada um dos lados dos triângulos se refere a uma medida de campo:

$\overline{BC} = h$ é altura da árvore sendo medida (metros);
$\overline{BD} = h_V$ é a altura da baliza (em metros);

$\overline{B'C'} = L_R$ é o comprimento da régua (em centímetros);

$\overline{B'D'} = l$ é a leitura na régua (em centímetros).

Logo, a fórmula do hipsômetro de Christen fica:

$$h = \frac{h_V \, L_R}{l}.$$

Este método de medição de altura tem duas grandes limitações práticas. A primeira é que apesar de não ser necessário medir a distância do observador à árvore (analise com cuidado a fórmula acima), o observador deve visualizar a árvore de uma determinada distância (que não precisa ser conhecida) definida pela relação entre a altura da árvore (h) e o comprimento da régua (L_R). Num povoamento florestal, essa distância pode não ser a mais conveniente para a visualização da árvore de interesse devido à posição da copa das demais árvores, mas o observador não tem a opção de escolher uma outra distância que lhe seja mais conveniente.

Uma análise cuidadosa da fórmula deste hipsômetro revela a sua segunda grande limitação. A altura da árvore sendo medida (h) é inversamente proporcional a leitura feita na régua (l), sendo que os demais termos (L_R e h_V) são constantes. Assim, quanto maior a árvore, menor a leitura feita no instrumento. Por exemplo, assumindo a altura da baliza h_V = 2 m e comprimento da régua L_R = 20 cm, uma árvore com h = 10 m teria leitura l = 4 cm. Já uma árvore com h = 20 m teria leitura l = 2 cm e uma árvore com h = 30 m teria leitura l = 1.3 cm. Como consequência, uma mesma diferença de altura corresponde a intervalos cada vez menores à medida que a altura aumenta. No exemplo acima, a diferença de 10 m corresponde a uma diferença de 2 cm na escala do hipsômetro de Christen se as alturas envolvidas forem de 10 para 20 m, mas corresponde a uma diferença de 0.7 cm se sairmos da altura de 20 m e formos para 30 m. O resultado final é que a medição de árvores altas ($h > 30$ m) se torna muito imprecisa. Erros milimétricos na leitura da escala podem ser ignorados para árvores pequenas, mas representam erro de vários metros na altura de árvores altas.

4.3 Método Trigonométrico de Mensuração

O método trigonométrico utiliza relações trigonométricas para obter a altura da árvore a partir de medidas diretas da distância observador-árvore e dos ângulos formados

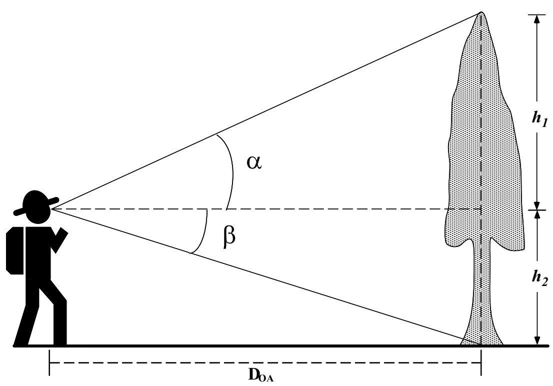

Figura 4.7: Funcionamento do método trigonométrico de medição de altura. Para as visadas de topo e base da árvore o instrumento mede o ângulo. Com o conhecimento da distância do observador à árvore e da tangente dos ângulos medidos, a altura da árvore é determinada.

nas visadas do topo e da base da árvore. Os hipsômetros que se baseiam no método trigonométrico são, portanto, capazes de medir o ângulo ou a inclinação de uma visada. Daí serem geralmente chamados de "*clinômetros*" ("clino": do grego "klinein", que significa curvar ou inclinar). A figura 4.7 mostra os ângulos formados quando se faz as visadas no topo e na base da árvore. Pela tangente do ângulo da visada de topo (α) obtemos:

$$\tan\alpha = \frac{h_1}{D_{OA}} \quad \Longrightarrow \quad h_1 = D_{OA}\,\tan\alpha,$$

enquanto na visada da base da árvore obtemos a expressão:

$$\tan\beta = \frac{h_2}{D_{OA}} \quad \Longrightarrow \quad h_2 = D_{OA}\,\tan\beta.$$

Logo, a altura total da árvore pelo método trigonométrico é obtida pela seguinte fórmula genérica:

$$h = h_1 + h_2 = D_{OA}\,(\tan\alpha + \tan\beta)\,.$$

A maioria dos hipsômetros utilizados em levantamentos florestais profissionais são clinômetros, isto é, se baseia no método trigonométrico, pois ele proporciona maior precisão nas medidas e maior velocidade de medição. Os clinômetros possuem um pêndulo ou mecanismo gravitacional sensível aos ângulo formados ao se inclinar o instrumento quando fazemos as visadas. As escalas apresentadas têm a forma $[D_{OA}\,\tan\alpha]$, onde α é o ângulo formado e D_{OA} é a distância observador-árvore. Assim, quando o observador se encontra exatamente a D_{OA} metros da árvore, as leituras relativas às visadas de topo e base fornecem diretamente as alturas h_1 e h_2, respectivamente, sem a necessidade do cálculo das tangentes. Por exemplo, a escala para distância D_{OA} = 20 m, é calibrada para $[20\ \tan\alpha]$ e as leituras nessa escala fornecem diretamente a altura quando o observador está a 20 m da árvore.

Mesmo que a melhor distância para visualização de uma árvore seja diferente das distâncias relativas às escalas de um determinado clinômetro, ainda é possível utilizar-lo. Digamos que o observador está a 40 m da árvore, mas a leitura foi realizanda na escala para D_{OA} = 20 m e a leitura obtida foi h'. A expressão para a altura correta h fica:

$$\begin{aligned} h &= D_{OA}\,(\tan\alpha + \tan\beta) \\ &= 40\,(\tan\alpha + \tan\beta) \\ &= 2\,[20(\tan\alpha + \tan\beta)] \\ &= 2\,h'. \end{aligned}$$

Portanto, basta multiplicar a leitura pela razão entre a verdadeira distância observador-árvore e a distância que a escala da leitura assume.

4.3.1 Escala Percentual Para Ângulos

Vários hipsômetros trazem uma outra alternativa para se medir a árvore de qualquer distância. A escala do instrumento é apresentada na forma percentual. Na medição de ângulos em escala percentual, o ângulo não é medido em termos de graus ou radianos, mas em termos percentuais da razão altura-distância. No caso da visada do topo da árvore (figura 4.7) a expressão percentual do ângulo é

$$\alpha_{\%} = \frac{h_1}{D_{OA}} \times 100 \qquad [\alpha_{\%} = \tan\alpha \times 100]$$

e a altura é obtida por:

$$h_1 = D_{OA}\left(\frac{\alpha_{\%}}{100}\right)$$

Assim, a fórmula para altura total quando os ângulos são medidos na escala percentual é

$$h = h_1 + h_2 = D_{OA}\left(\frac{\alpha_{\%} + \beta_{\%}}{100}\right)$$

bastando multiplicar a soma das leituras na escala percentual pela distância observador-árvore.

Todos os clinômetros necessitam da distância observador-árvore para a determinação da altura. Dada a precisão de tais instrumentos, esta distância dever ser medida de forma adequada, isto é, utilizando uma fita métrica ou um “rangefinder”. Medidas grosseiras baseadas em passos ou, no caso de florestas plantadas no espaçamento de plantio, não são apropriadas e comprometem a qualidade das medidas obtidas.

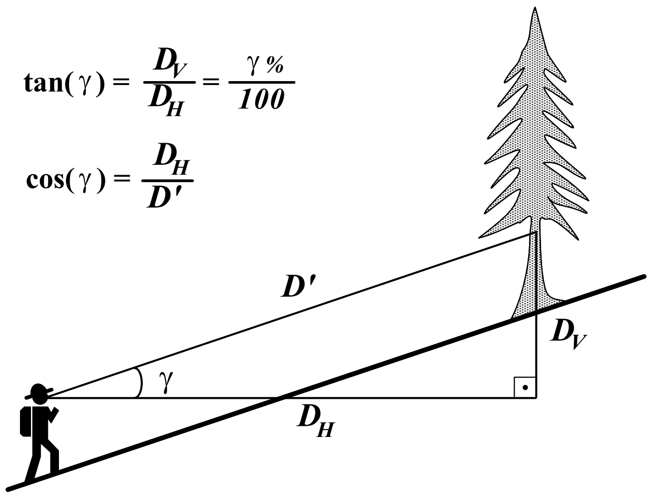

Figura 4.8: Efeito da declividade do terreno na medição da distância observador-árvore. γ é o ângulo de declividade do terreno, D' é a distância sobre o terreno D_H é a distância horizontal e D_V é o deslocamento vertical provocado pela declividade.

4.4 Correção para Declividade

A distância observador-árvore mecionada tando no método trigonométrico como nos métodos geométricos, é sempre a distânica horizontal ou "planimétrica", ou seja, a mesma distância que seria obtida com uma régua sobre um mapa planimétrico de escala conhecida. Em terrenos declivosos esta distância pode diferir bastante daquela medida diretamente sobre o terreno, sendo necessário corrigir a medida da altura obtida. A figura 4.8 mostra uma situação de declive onde a distância horizontal (D_H) difere bastante da distância sobre o terreno (D').

A formação do triângulo retângulo hipotético revela que

$$\cos\gamma = \frac{D_H}{D'} \quad \Longrightarrow \quad D_H = D' \cos\gamma$$

consequentemente, o fator de correção da altura é $[\cos\gamma]$. A fórmula para a altura nesses casos fica:

$$\begin{aligned} h &= (cos\gamma)\, D'\ (l_1 + l_2) \\ h &= (cos\gamma)\, h' \end{aligned}$$

onde h' é altura obtida pela leitura da escala do hipsômetro ou clinômetro.

O ângulo da declividade pode ser apresentado na forma percentual, principalmente se utilizarmos um hipsômetro para medir a declividade do terreno. Nesse caso, o ângulo deve ser transformado para a escala de graus ou radianos para depois ser obtido o seu cosseno:

$$\tan\gamma = \left(\frac{\gamma\%}{100}\right)$$

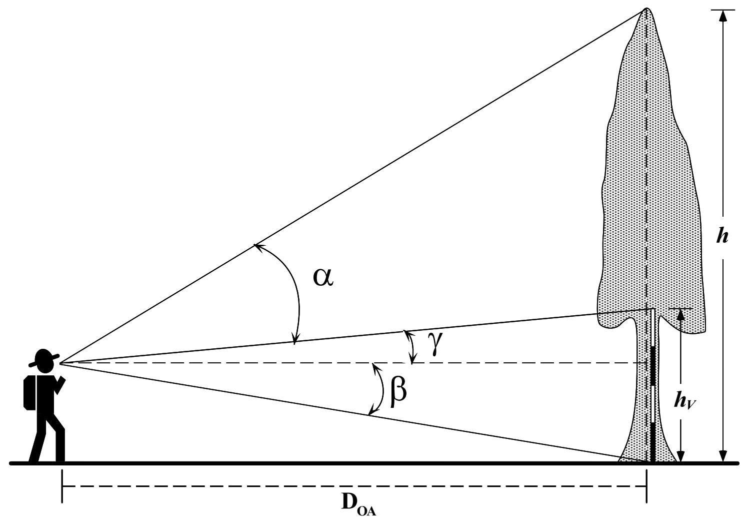

Figura 4.9: Aplicação da idéia do hipsômetro de Christen na medição da altura de árvores pelo método trigonométrico sem o conhecimento da distância observador-árvore.

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \gamma &= \text{arc}\tan\left(\frac{\gamma_{\%}}{100}\right) \\ \Longrightarrow h &= \cos\left[\text{arc}\tan\left(\frac{\gamma_{\%}}{100}\right)\right]\ h' \end{aligned}$$

4.5 Altura sem a Distância Observador-Árvore

A distância observador-árvore é de medição relativamente fácil na maioria das condições florestais, seja em florestas nativas seja em florestas plantadas. Em geral, a visualização apropriada da base e da copa da árvore oferece maior dificuldade do que a medição da distância. Entretanto, é possível aliar a idéia do hipsômetro de Christen ao uso de clinômetros e eliminar a necessidade de se medir a distância do observador à árvore. O método utiliza uma baliza de altura conhecida (h_V) e um clinômetro que apresente os ângulos na escala percentual. A baliza é encostada à árvore e o observador se posiciona de modo a poder tomar visadas do topo da árvore, da base da árvore e do topo da baliza, conforme a figura 4.9.

As visadas que envolvem a árvore nos fornecem a relação:

$$h = D_{OA}\,(\alpha_{\%} + \beta_{\%})/100 \quad\Longrightarrow\quad D_{OA} = \frac{h}{(\alpha_{\%} + \beta_{\%})/100}.$$

Assumindo que a base da baliza e a base da árvore estão na mesma posição, as visadas que envolvem a baliza produzem a relação:

$$h_V = D_{OA}\,(\gamma_\% + \beta_\%)/100 \quad \Longrightarrow \quad D_{OA} = \frac{h_V}{(\gamma_\% + \beta_\%)/100}.$$

Igualando-se as duas expressões temos:

$$\begin{aligned} \frac{h}{(\alpha_\% + \beta_\%)/100} &= \frac{h_V}{(\gamma_\% + \beta_\%)/100} \\ h &= h_V\,\frac{\alpha_\% + \beta_\%}{\gamma_\% + \beta_\%}. \end{aligned}$$

A expressão final mostra que com uma visada extra num ponto de altura conhecida junto ao tronco da árvore elimina-se a necessidade de medição da distância do observador à árvore. Esta técnica não é utilizada com frequência, porque o ângulo de visada do topo da baliza ($\gamma_\%$) tende a ser um ângulo pequeno e pequenos erros na mensuração deste ângulo resultam em erros consideráveis na altura medida.

4.6 Situações Problemáticas

Existem algumas situações onde a qualidade da medição altura é comprometida devido a problemas de campo:

Visualização da Copa: Em florestas densas, a visualização da copa de uma árvore pode ser obstruída pelas copas das demais árvores, sendo comum o observador se aproximar mais da árvore com o objetivo de visualizá-la melhor. O excesso de proximidade, entretanto, gera um outro problema de visualização onde os ramos laterais são confundidos com os ramos mais altos (figura 4.10 (a)). Para evitar esse tipo de problema, não se deve medir uma árvore a uma distância inferior a sua altura.

Precisão da Escala: Tendo em mente o problema anterior, o observador pode pensar em se afastar ao máximo da árvore, o que é possível em florestas abertas e savanas. Neste caso, entretanto, os ângulos de visadas formados tendem a ser muito pequenos e um erro pequeno na leitura da escala pode resultar num grande erro na altura da árvore. Para evitarmos estes problemas, devemos efetuar as medições de distâncias entre 1.0 e 1.5 vêzes a altura da árvore.

Terrenos Declivosos: Como vimos, em terrenos declivosos é necessário realizar a correção para declividade para obtermos a altura correta. O ideal, entretanto, é evitar tais situações uma vez que a correção impõe um cálculo extra e em encostas muito íngremes a visada das árvore se complica. A figura 4.10 mostra duas situações onde as visadas do topo e da base da árvore ficam abaixo (figura 4.10 (b)) e acima (figura 4.10 (c)) da linha horizontal que passa pelos olhos do observador. Nesses casos, a fórmula para altura total passa a ser a diferença, em termos absolutos, entre as leituras. No campo, o observador sempre tem a possiblidade de escolher a direção de onde fará as visadas. É sempre conveniente evitar as direções de maior declive e procurar fazer as visadas segundo as curvas de nível do terreno.

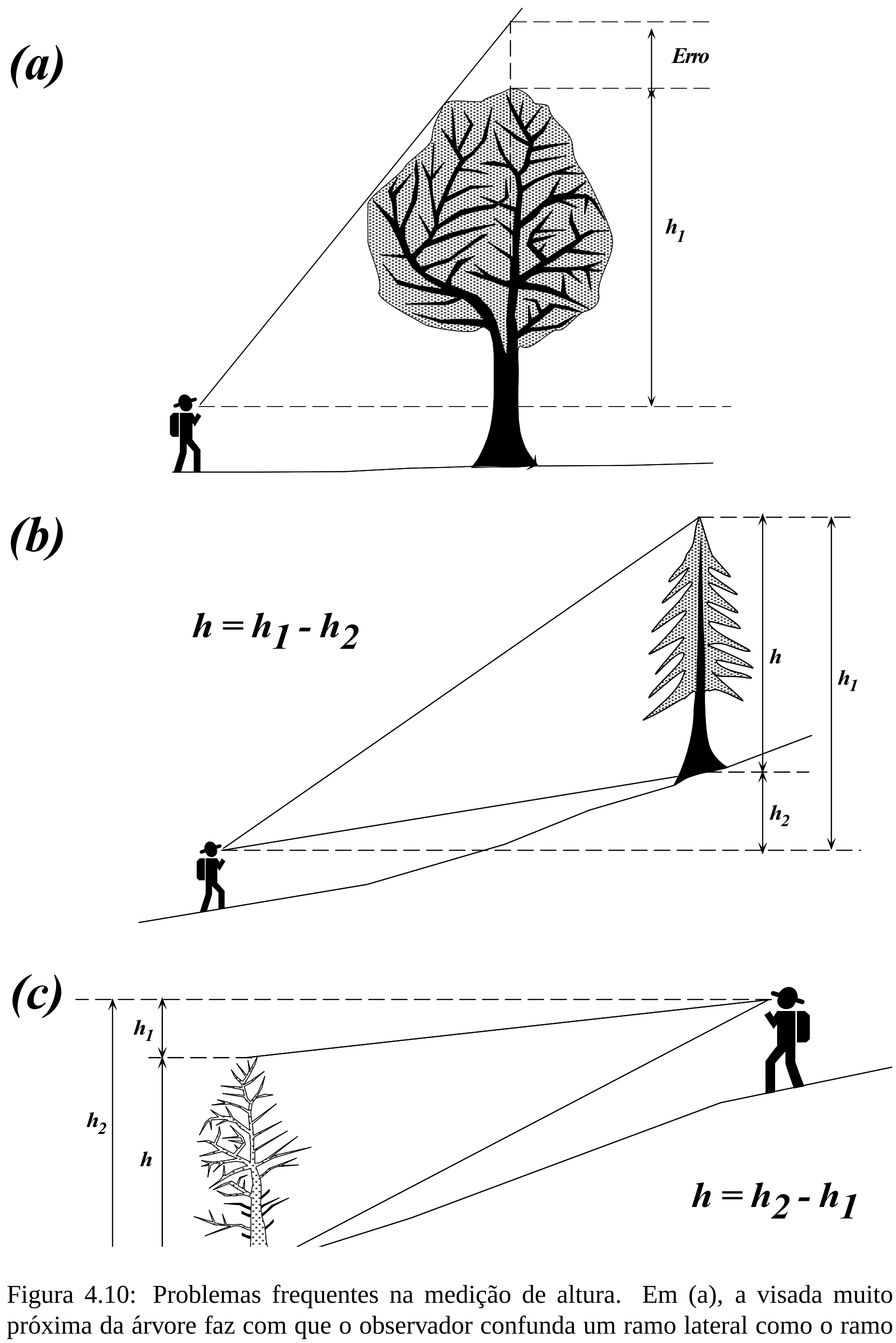

Figura 4.10: Problemas frequentes na medição de altura. Em (a), a visada muito próxima da árvore faz com que o observador confunda um ramo lateral como o ramo mais alto da árvore. Em (b) e (c), a medição em áreas muito declivosas faz com que as visadas do topo e da base da árvore estejam acima ou abaixo da linha horizontal que passa pela altura dos olhos do observador.

CAPÍTULO 5
VOLUME E FORMA DO TRONCO

A medição do volume de árvores individuais é chamada de *cubagem* ou *cubicagem*. Provavelmente, estes termos tiveram origem entre os gregos antigos, para os quais determinar a área de um figura plana era o mesmo que encontrar um quadrado de igual área (*quadratura*) e determinar o volume de um sólido qualquer era encontrar um cubo com igual volume. Independentemente da origem do termo, a cubagem de árvores é o primeiro passo na estimativa do volume de madeira de uma floresta e, consequentemente, da produtividade florestal. Neste capítulo, veremos como o volume de árvores individuais pode ser medido diretamente ou determinado indiretamente através de fórmulas.

5.1 Mensuração Direta do Volume

A mensuração direta do volume de árvores em pé necessitam de instrumentos especiais e é, em geral, um processo demorado. Via de regra, o volume de árvores é medido para um conjunto de árvores que são abatidas. A partir destas árvores, se constroi uma relação entre o volume e outras dimensões de fácil mensuração, como diâmetro e altura, para que o volume das árvores em pé na floresta possa ser estimado.

No caso das árvores abatidas, o método direto de mensuração do volume se baseia no princípio de Arquimedes. Esse método também é chamado de método do xilômetro, sendo prático somente quando a árvore é seccionada em diversas toras. O método consiste em mergulhar os toretes num tanque com água e medir o deslocamento do nível de água no tanque O produto da área do tanque pelo o deslocamento do nível d'água quando a tora é introduzida no tanque fornece o volume da tora.

A praticidade do método depende do tamanho das toras e do tanque disponível. Frequentemente, um pequeno tanque é construido soldando-se dois latões de óleo, resultando num o xilômetro tem secção circular (figura 5.1). Se o xilômetro de diâmetro L (cm) e uma tora introduzida gera um deslocamento l (cm), o volume desta tora será:

$$v_l = \left(\frac{\pi}{40000} \right) L^2 \, l.$$

Para a cubagem de diversas árvores no campo, este método é trabalhoso, pois as árvores precisam ser transportandas até o local do xilômetro. Assim, o método di-

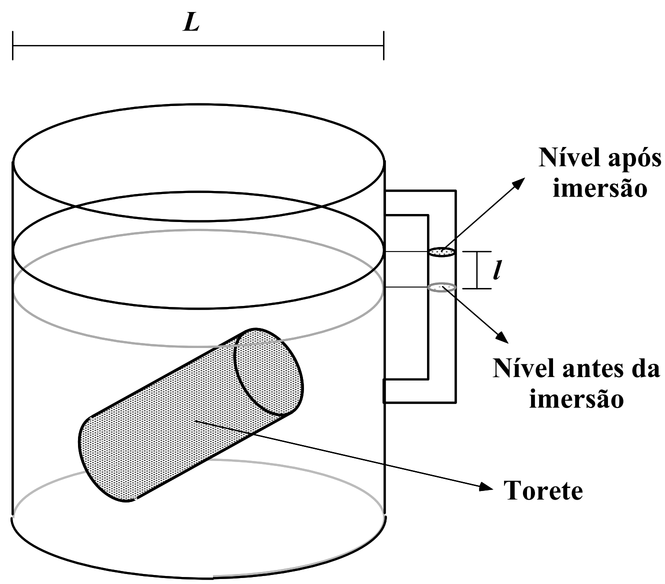

Figura 5.1: Utilização do Xilômetro para cubagem de toretes.

reto acaba sendo utilizado somente em situações especiais quando se dispõe de um xilômetro adequado e a precisão na medição do volume de cada árvore individual é muito importante.

5.2 Métodos indiretos de Mensuração

Os métodos mais práticos de utilização no campo envolvem a medição de diâmetros e comprimentos ao longo do tronco da ávore. O volume é obtido indiretamente através de fórmulas ou procedimentos gráficos que produzem uma medida aproximada do volume do tronco. Para troncos sem muita tortuosidade, os métodos indiretos produzem resultados suficientemente acurados para fins de estimativa do volume de madeira numa floresta. A praticidade destes métodos, entretanto, requer o conhecimento do volume de figuras sólidas de base circular (sólidos geométricos).

5.2.1 Sólidos Geométricos

Os sólidos geométricos de base circular podem ser vistos como uma família de sólidos que se inicia com o cilindro (figura 5.2). No cilindro, o volume é facilmente determinado pelo produto da área da base (a_b) pela altura (h). A partir do cilindro, a mudança na forma do sólido produz uma redução do volume, embora a área da base e a altura permaneçam inalteradas. Assim, tanto o volume quanto a forma dos demais sólidos geométricos pode ser definida a partir da sua relação com o cilindro.

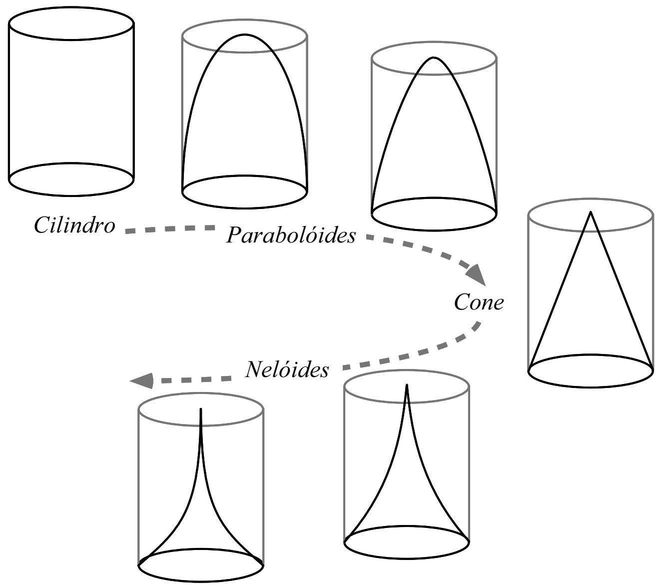

Figura 5.2: Exemplos de sólidos geométricos de base circular. Como resultado da mudança na forma do sólido, o volume decresce a partir do cilindro, embora a área da base e a altura permaneçam constantes.

A figura 5.2 mostra que na família dos sólidos geométricos de base circular, a forma e, consequentemente o volume, mudam de modo contínuo a partir do cilindro. Alguns destes sólidos, no entanto, são mais conhecidos pois a sua relação pode ser expressa em frações "clássicas". Alguns exemplos são:

Cilindro	$v_{\text{CIL.}}$	$= a_b \times h$
Parabolóide Quadrático	v	$= (1/2) \times v_{\text{CIL.}} = (1/2) \times a_b \times h$
Cone	v	$= (1/3) \times v_{\text{CIL.}} = (1/3) \times a_b \times h$
Nelóide Ordinário	v	$= (1/4) \times v_{\text{CIL.}} = (1/4) \times a_b \times h$

O cilindro e o cone são as referências básicas na família dos sólidos geométricos de base circular. Os sólidos com volume/forma intermediários entre o cilindro e cone são chamados de *parabolóides* e os sólidos com volume/forma menores que o cone são chamados genericamente de *nelóides*. O cone tem exatamente um terço do volume do cilindro, mas nem todo parabolóide possui exatamente metade do cilindro e nem todo nelóide tem um quarto do cilindro. Na verdade, os parabolóides são sólidos cujo o volume variam de uma vez a metade do cilindro, enquanto os nelóides variam de um terço a "zero" do volume do cilindro.

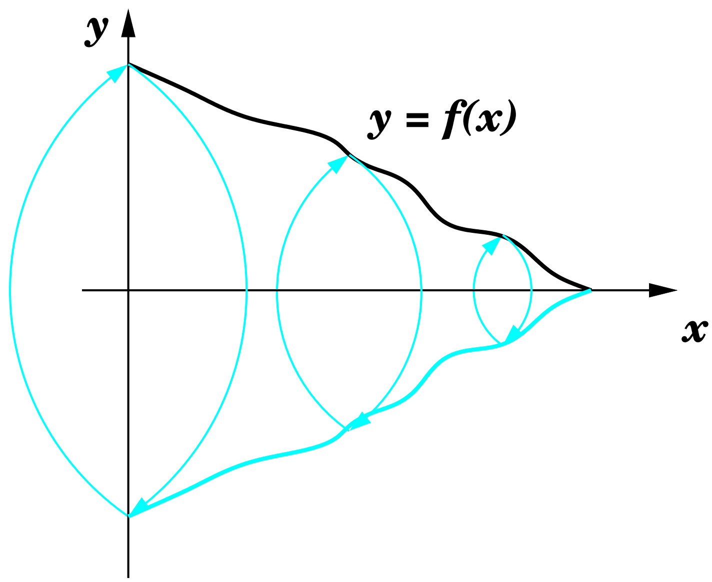

Figura 5.3: A rotação de uma função qualquer ($y = f(x)$) ao redor do eixo x (revolução) gera um sólido de base circular.

5.2.2 Sólidos de Revolução.

Todos os sólido geométrico de base circular podem ser gerados pela rotação de uma função matemática ao redor de um eixo no plano cartesiano. A figura 5.3 mostra como a rotação de uma função $y = f(x)$ ao redor do eixo x gera um sólido de base circular. Assim, para cada função representada no plano cartesiano existirá um sólido de revolução correspondente. Note que a função $y = f(x)$ representa o raio do sólido em função da altura ao longo do eixo de rotação.

Para representarmos melhor a família dos sólidos geométricos devemos buscar uma única função que represente a variação do raio da secção transversal dos sólidos geométricos em função da altura a partir da base do sólido. A figura 5.4 apresenta alguns exemplos de sólidos geométricos gerados pela rotação de diversas funções ao redor do eixo x. Todos estes exemplos podem ser expressos matematicamente por uma única equação:

$$y = \frac{d_b/2}{h^r}(h-x)^r \tag{5.1}$$

onde:

x é a distância a partir da base até o topo da árvore;

y é o raio da seccção transversal;

d_b é o diâmetro da base;

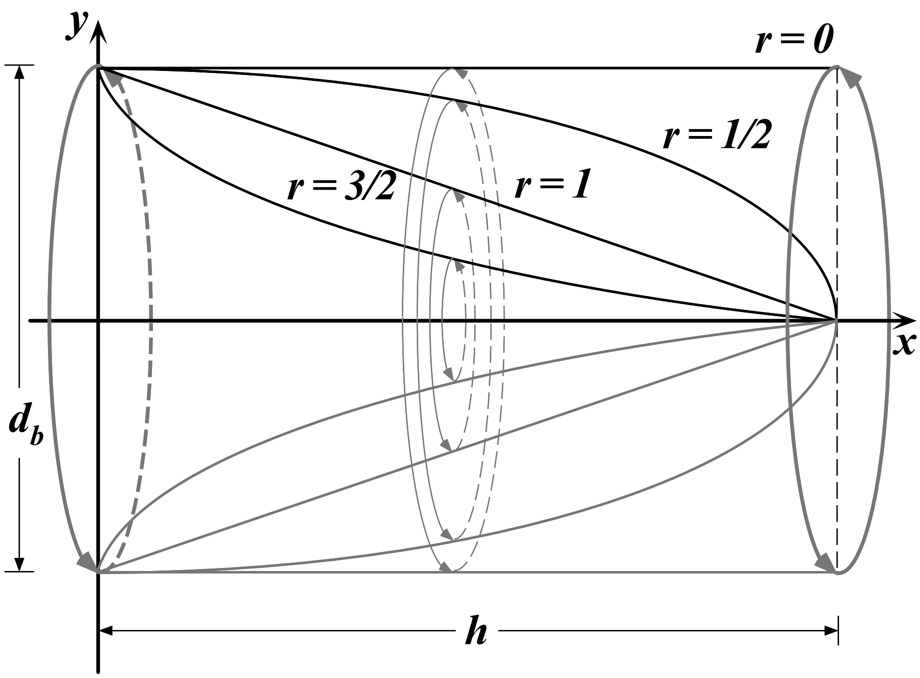

Figura 5.4: Formação dos sólidos geométricos da família do cilindro a partir da rotação de uma função no plano cartesiano $x-y$ que represente a variação do raio (y) em função da altura (x) a partir da base. Duas medidas dos sólidos permanecem inalteradas: o diâmetro da base (d_b) e a altura total (h).

h é a altura total da árvore;

r é o coeficiente que define o tipo de sólido.

O termo chave desta equação é o coeficiente r que define o sólido geométrico formado (figura 5.4). O coeficiente r controla como o raio da secção transversal varia à medida que se parte da base para o topo. Para o **cilindro** $r = 0$ e a equação (5.1) fica:

$$y \quad = \quad = \frac{d_b/2}{h^0}(h-x)^0 = \frac{d_b}{2}$$

ou seja, o raio é constante e igual a metade do diâmetro da base.

No caso do **cone**, o coeficiente é $r = 1$ e a função se torna:

$$y \quad = \quad \frac{d_b/2}{h^1}(h-x)^1 = (d_b/2)\left[\frac{h-x}{h}\right] = (d_b/2)\left[1 - \frac{x}{h}\right]$$

mostrando que no cone o raio decresce linearmente a partir da base para o topo. Para os **parabolóides**, o coeficiente fica entre 0 e 1 ($0 < r < 1$), à medida que r se aproxima de 0 o volume do parabolóide se aproxima do volume do cilindro, enquanto que quando r se aproxima de 1 o volume do parabolóide se aproxima do volume do cone. Nos **nelóides**, o coeficiente é sempre maior que 1 ($r > 1$) de modo que quando r se aproxima de 1 o volume do nelóide se aproxima do volume do cone e quando r tende ao infinito o volume do nelóide se aproxima de zero.

5.2.3 Volume de Sólidos Geométricos através dos Sólidos de Revolução

Como a equação (5.1) descreve a variação do raio em função da altura, para obtermos a área da secção transversal (área secional) a diferentes alturas ao longo do eixo central do sólido geométrico, basta aplicar a fórmula da área do círculo sobre esta equação:

$$g(x) \quad = \quad \pi y^2 = \left(\frac{\pi}{4}\right) \frac{d_b^2}{h^{2r}} (h-x)^{2r} \tag{5.2}$$

onde:

$g(x)$ é a área seccional à altura x;

e os demais termos como na equação (5.1).

Esta equação da área seccional em função da altura pode nos fornecer o volume do sólido geométrico. Imaginemos que o sólido é composto de infinitas “fatias” (secções) cuja espessura tende a zero. A somatória da área destas “fatias” seria igual ao volume do sólido. Este processo imaginário pode ser realizado matematicamente utilizando o conceito de integral de Rieman. Se a equação (5.2) for integrada a partir da base ($x = 0$) até a altura total do sólido ($x = h$), o resultado será o volume do sólido geométrico. A integral da equação (5.2) é

$$\begin{aligned}
v &= \int_0^h \left(\frac{\pi}{40000}\right) \frac{d_b^2}{h^{2r}} (h-x)^{2r} dx \\
&= \left(\frac{\pi}{40000}\right) \frac{d_b^2}{h^{2r}} \int_0^h (h-x)^{2r} dx \\
&= \left(\frac{\pi}{40000}\right) \frac{d_b^2}{h^{2r}} \left[-\frac{(h-x)^{2r+1}}{2r+1} \right]_0^h \\
&= \left(\frac{\pi}{40000}\right) \frac{d_b^2}{h^{2r}} \left[\frac{h^{2r+1} - (h-h)^{2r+1}}{2r+1} \right] \\
&= \left(\frac{\pi}{40000}\right) \frac{d_b^2}{h^{2r}} \quad \frac{h^{2r+1}}{2r+1} \\
v &= \left[\frac{1}{2r+1}\right] \left(\frac{\pi}{4}\right) d_b^2 h
\end{aligned}$$

Note que a parte da expressão que envolve o diâmetro da base ao quadrado ($(\pi/40000) d_b^2$) é igual a área da base (a_b) e, portanto, esta expressão pode ser apresentada na forma:

$$v \quad = \quad \left[\frac{1}{2r+1}\right] \left(\frac{\pi}{40000}\right) d_b^2 h = \left[\frac{1}{2r+1}\right] a_b^2 h = \left[\frac{1}{2r+1}\right] v_{\text{CILINDRO}} \tag{5.3}$$

Com a equação (5.3) chegamos a uma maneira genérica de se definir o volume dos sólidos geométricos de base circular como uma função do volume do cilindro.

O fator dentro de colchetes controla como a forma do sólido geométrico se afasta da forma do cilindro, sendo denominado **Fator de Forma Absoluto** (f_a):

$$f_a = \frac{1}{2r+1} \tag{5.4}$$

O volume dos sólidos geométricos é o produto Coeficiente de Forma Absoluto pelo volume do cilindro. Podemos reapresentar, portanto, a família dos sólidos geométricos da seguinte maneira:

Nome		**Coeficiente**	**Fator de Forma Absoluto**
Cilindro		$r = 0$	$f_a = 1$
Parabolóides		$0 < r < 1$	$1 > f_a > 1/3$
	Cúbico	$r = 1/3$	$f_a = 3/5$
	Quadrático	$r = 1/2$	$f_a = 1/2$
	Semi-cúbico	$r = 2/3$	$f_a = 3/7$
Cone		$r = 1$	$f_a = 1/3$
Nelóides		$1 < r < \infty$	$1/3 > f_a > 0$
	Ordinário	$r = 3/2$	$f_a = 1/4$

5.2.4 Volume de Sólidos Geométricos Truncados

Com base na tabela da família dos sólidos geométricos, podemos obter diretamente o volume de qualquer sólido a partir da fórmula do volume do cilindro. Em geral, nenhuma árvore se aproxima perfeitamente dos sólidos geométricos, mas partes do tronco da árvore (toretes) podem ser razoavelmente representadas por sólidos geométricos truncados. Para se obter o volume dos sólidos truncados devemos voltar a fórmula (5.3), mudarmos os limites de integração e fazer outras transformações que nos permitam obter o volume do sólido truncado a partir de medidas que possam ser tomadas num torete, quais sejam: comprimento do torete (l), a área face da base do torete (a_b) e área da face to topo do torete (a_l). A aplicação desta metodologia aos principais sólidos geométricos resulta nas seguintes fórmulas:

Cilindro: $r = 0$

$$v(l) = \left(\frac{\pi}{40000}\right) d_b^2 h = a_b\, l \tag{5.5}$$

Cone: $r = 1$

$$\begin{aligned} v(l) &= \frac{l}{3}\left[\left(\frac{\pi}{40000}\right) d_b^2 + \left(\frac{\pi}{40000}\right) d_b d_l - \left(\frac{\pi}{40000}\right) d_l^2\right] \\ &= \frac{l}{3}[a_b + \sqrt{a_b a_l} + a_l] \end{aligned} \tag{5.6}$$

Parabolóide Quadrático: $r = 1/2$

$$\begin{aligned} v(l) &= \frac{h}{2}\left[\left(\frac{\pi}{40000}\right) d_b^2 + \left(\frac{\pi}{40000}\right) d_l^2\right] \\ &= \frac{l}{2}[a_b + a_l] \end{aligned} \tag{5.7}$$

Nelóide Ordinário: $r = 3/2$

$$\begin{aligned} v(l) &= \frac{l}{4}\left[\left(\frac{\pi}{40000}\right) d_b^2 + \left(\frac{\pi}{40000}\right) d_b^{4/3} d_l^{2/3} + \left(\frac{\pi}{40000}\right) d_b^{2/3} d_l^{4/3} + \left(\frac{\pi}{40000}\right) d_l^2\right] \\ &= \frac{l}{4}\left[a_b + \sqrt[3]{a_b^2 a_l} + \sqrt[3]{a_b a_l^2} + a_l\right] \end{aligned} \tag{5.8}$$

5.3 Fórmulas de Cubagem

O tronco de uma árvore não pode ser apropriadamente representado por um único sólido geométrico. Mas se o tronco é seccionado em toretes, a forma destes se aproxima de sólidos geométricos truncados. O tipo de sólido geométrico mais apropriado, entretanto, depende da posição do torete no tronco (figura 5.5). Geralmente a base do tronco tende a um cilindro, enquanto que o terço inferior se aproxima de nelóides truncados. Já os dois terços superiores do tronco se aproximam de parabolóides truncados e a ponta pode ser adequadamente descrita por um cone ou parabolóide. A variação da forma do tronco tem as seguintes implicações para a medição do volume:

- É pouco preciso se medir o volume do tronco com base em um único sólido geométrico para toda a árvore.
- A melhor forma de cubagem do tronco é por partes, isto é, por toretes individuais de curto comprimento, pois eles se aproximam dos sólidos geométricos.
- Quanto menor o comprimento do torete, melhor a sua forma se aproximará de um dos sólidos geométricos.
- Não é necessário torar o tronco de fato, basta medí-lo a intervalos curtos.

As fórmulas de cubagem são equações que definem o volume de sólidos geométricos truncados, ou equações aproximadas para um conjunto de sólidos geométricos truncados. As principais fórmulas são:

Smalian: é a própria fórmula do parabolóide quadrático truncado:

$$v = \frac{l}{2}(a_b + a_l) = \frac{\pi}{80000}\left(d_b^2 + d_l^2\right) l. \tag{5.9}$$

onde a_b e a_l são as áreas das faces maior e menor do torete, respectivamente, e l é o comprimento do torete.

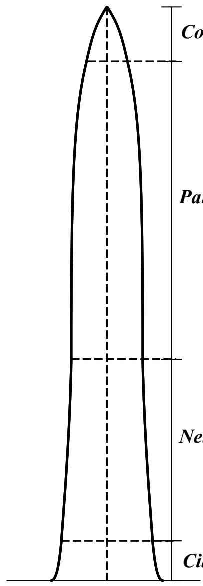

Figura 5.5: Variação da forma do tronco de acordo com a posição do torete (Husch et al., 1982).

Huber: é também uma fórmula do parabolóide quadrático, mas se baseia em uma única medida tomada no meio do torete:

$$v = l\, a_{l/2} = \left(\frac{\pi}{40000}\right) d_{l/2}^2\, l \quad (5.10)$$

onde o subscrito $l/2$ representa a posição do meio do torete de comprimento l.

Newton: é a fórmula mais precisa, sendo uma boa aproximação para nelóide, cone ou parabolóide truncados:

$$v = \frac{l}{6}\left(a_b + 4a_{l/2} + a_l\right) = \frac{\pi}{240000}\left(d_b^2 + 4d_{l/2}^2 + d_l^2\right) l \quad (5.11)$$

Para um parabolóide quadrático, as fórmulas de Smalian (5.9) e a de Huber (5.10) produzem extamente o mesmo resultado. Para outros tipos de parabolóides e outros sólidos geométricos as fórmulas podem divergir consideravelmente. A fórmula de Newton é considerada a mais acurada, mas requer que cada torete seja medido nas suas duas extremidades e no meio. A medida do diâmetro no meio da tora nem sempre é muito prática, principalmente quando a tora é muito grande ou quando desejamos obter o volume de madeira sem a casca. De modo geral, a fórmula de Smalian é a mais utilizada.

5.3.1 Toragem da Árvore.

Para a cubagem de uma árvore não é necessário que o tronco seja seccionado em toretes (toragem do tronco), basta que o diâmetro do tronco seja medido nas diferentes posições. Existem vários critérios de onde os diâmetros podem ser medidos:

- Medição em posições fixas ao longo do tronco, como por exemplo:

$$\{\text{base } (0m), 1m, 1.3m(DAP), 2m, 3m, \ldots\}$$

  Como a maior parte do volume do tronco se encontra na sua porção inferior, podemos aumentar o número de medições na base da árvore de forma a aumentar a precisão da medição do volume . Por exemplo:

$$\{\text{base } (0m), 0.1m, 0.3m, 0.5m, 0.7m, 1.0m, 1.3m, 2m, 3m, 4m, \ldots\}$$

- As medições também podem ser realizadas com intervalo entre medição ou o comprimento dos toretes fixos (figura 5.6), como por exemplo:

$$\{0.3m, 1.3m, 2.3m, 3.3m, \ldots\}$$

  Neste caso, as fórmulas de cubagem podem ser aplicadas diretamente para à árvore como um todo. Tomando toretes de comprimento fixo igual a l, temos:

  Smalian:

$$v = \left(\frac{\pi}{80000}\right) l \left[d_0^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} d_i^2 + d_n^2\right]$$

  Huber: d_i são os diâmetros no meio dos toretes.

$$v = \left(\frac{\pi}{40000}\right) l \sum_{i=1}^{n} d_i^2$$

  Newton: para um número par de toretes (n), sendo $i = 1, 3, 5, \ldots, n-1$ e $j = 2, 4, 6, \ldots, n-2$, temos:

$$v = \left(\frac{\pi}{240000}\right) l \left[d_0^2 + 4\sum_{i=1}^{n-1} d_i^2 + 2\sum_{j=2}^{n-2} d_j^2 + d_n^2\right]$$

- Podemos ainda tomar as medições de acordo com as posições relativas no tronco em relação à altura total (h). Por exemplo, no método de Hohenadl as posições de medição são:

$$\{0.1h,\ 0.3h,\ 0.5h,\ 0.7h,\ 0.9h\}$$

  sendo, portanto, os comprimentos de cada torete igual a $0.2h$. A fórmula de Huber se mostra bastante apropriada para este caso:

$$v = \frac{\pi}{40000}\left[d_{0.1}^2 + d_{0.3}^2 + d_{0.5}^2 + d_{0.7}^2 + d_{0.9}^2\right] 0.2h$$

  Como o intervalo entre medições depende da altura total da árvore (h), a precisão na medição do volume será variável tanto ao longo do tronco, quanto entre árvores. Árvores maiores terão medidas a intervalos maiores e, consequentemente, menor precisão.

De modo geral, o volume da ponta da árvore (figura 5.6) é obtido assumindo a ponta como um cone perfeito.

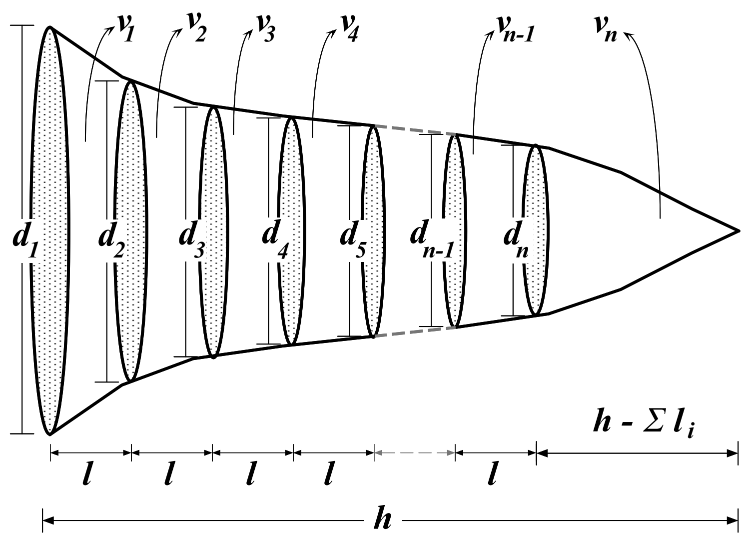

Figura 5.6: Cubagem rigorosa de árvore inteira com toretes de mesmo comprimento. O comprimento da ponta da árvore é a diferença entre a altura total e a somatória dos comprimentos ($h - \sum l_i$), e o volume da ponta é obtido assumindo que esta é perfeitamente cônica.

5.3.2 Método Gráfico.

O método gráfico é um método tradicional que vem sendo menos utilizado devido às calculadoras eletrônicas e aos computadores. O método consiste em plotar num gráfico a área da secção transversal do tronco contra a posição ao longo do tronco a partir da base (figura 5.7). Construindo-se o gráfico num papel milimetrado, a área abaixo da linha formada pode ser facilmente medida. O volume do tronco é obtido pela conversão desta área de acordo com as unidades de medida adequadas. Em geral as áreas seccionais são plotadas em cm^2, enquanto que a posição é plotada em m, assim cada unidade de área abaixo da linha do gráfico representa 0.1 dm^3.

A linha do gráfico é geralmente formada por retas que ligam os pontos de medição, mas nada impede que se use métodos de interpolação mais sofisticados. A simples ligação dos pontos de medida por retas representa uma interpolação linear, a qual implica num formato cônico para os toretes. A interpolação quadrática é uma opção melhor, uma vez que os toretes do tronco das árvores se aproximam mais do parabolóide do que do cone.

5.4 Outros Métodos de Cubagem

Existem métodos para medição do volume de árvores individuais que são específicos para cada utilização da madeira. Vejamos alguns utilizados para quantificar madeira

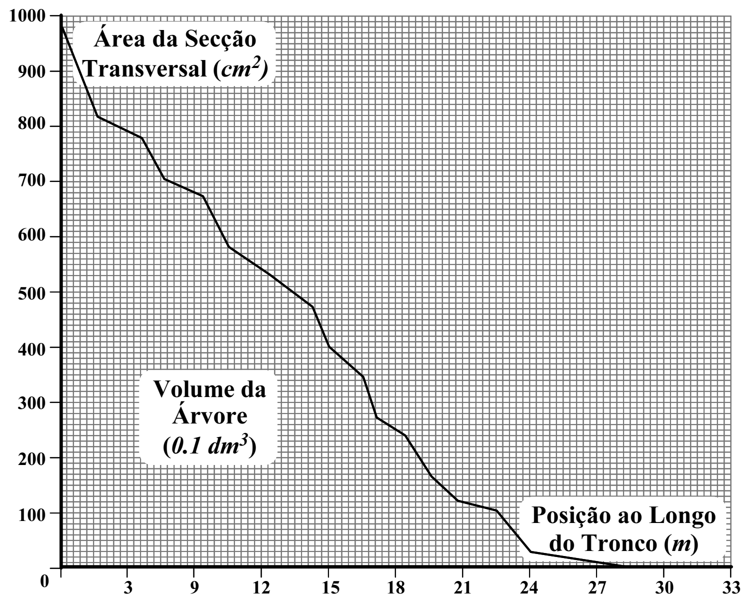

Figura 5.7: Cubagem de árvore inteira utilizando o método gráfico. No eixo das ordenadas (y) coloca-se a área seccional obtida em diferentes posições do tronco. No eixo das abcissas (x) coloca-se a distância a partir da base do tronco. O volume da árvore é definido como a área abaixo da linha do gráfico. As áreas secionais devem ser plotadas em cm^2 e a distância da base em m, assim, a unidade de medida do volume é $0.1\,dm^3$.

para serraria e laminação.

5.4.1 Regra de Francon para Espécies Nativas.

A regra de Francon é aplicada a toras de espécies nativas de florestas tropicais, principalmente da região Amazônica, com o objetivo de quantificar o volume sólido de toras para serraria. A regra consiste na seguinte fórmula desenvolvida empiricamente e que produz resultados razoáveis:

$$v_l = \left[\frac{c_m}{4}\right]^2 l \tag{5.12}$$

onde:

c_m é a circunferência no meio da tora;

l é o comprimento da tora;

v_l é o volume da tora em metros cúbicos.

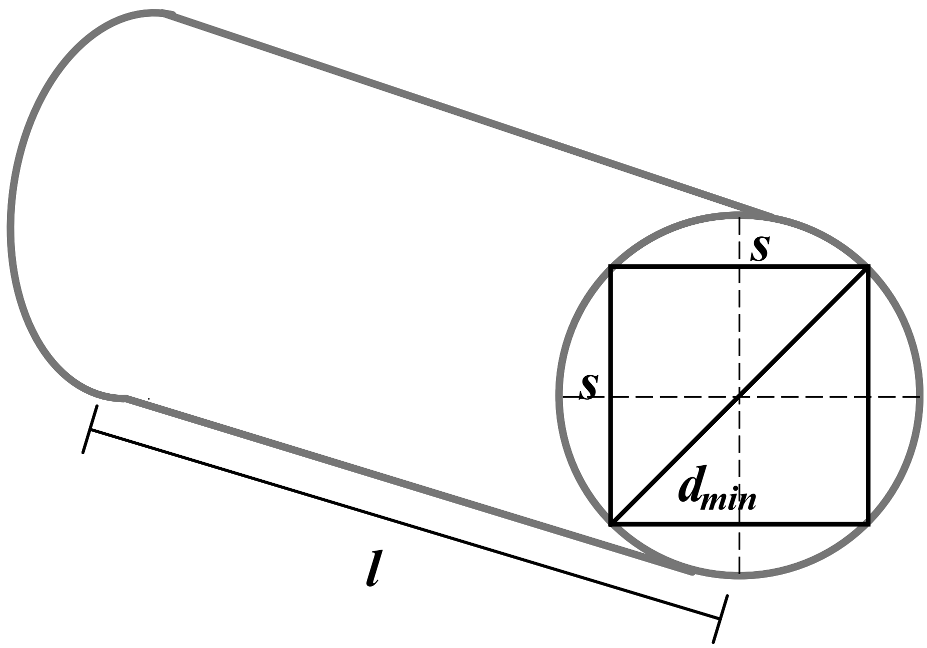

Figura 5.8: Método da Alfândega de Paris para a quantificação do volume útil para serraria em madeira roliça. O volume útil é definido como o sólido geométrico de *base quadrada* a partir do quadrado circunscrito na face de menor diâmetro da tora: s é o lado da base quadrada, d_{MIN} é o diâmetro da tora na sua menor face, sendo também a diagonal da base quadrada, e l o comprimento da tora.

5.4.2 Volume pelo Método da Alfândega de Paris

O método da Alfândega de Paris é outro método prático/empírico utilizado para se quantificar o volume para serraria de toras de exportação. O método consiste em determinar o volume de um sólido de base quadrada, cuja a base pode ser circunscrita pela área da menor face da tora (figura 5.8). Se esse quadrado tem lado s teremos, por Pitágoras:

$$\begin{aligned} d_{\text{MIN}}^2 &= s^2 + s^2 \\ s^2 &= \frac{d_{\text{MIN}}^2}{2} \quad \left[\text{Área do quadrado circunscrito}\right] \\ v_{\text{ÚTIL}} &= s^2\, l = \frac{d_{\text{MIN}}^2\, l}{2} \end{aligned}$$

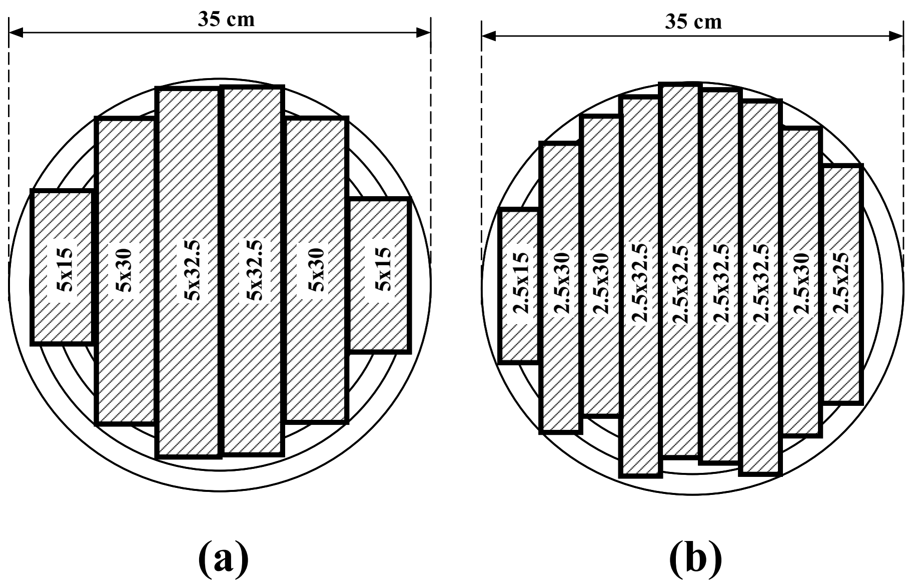

Figura 5.9: Volume útil para serraria considerando tamanho de peças específicos. Em (a) as peças tem espessura constante de 2 cm, enquanto que em (b) a espessura é de 1.5 cm. A largura das peças é variável de modo a aumentar o aproveitamento da tora, já o comprimento das peças é definido pelo comprimento da tora.

5.4.3 Volume de Peças de Tamanho Específico.

O volume de madeira após o processamento na serraria depende do tamanho da tora, do tamanho das peças a serem serradas, do tipo de serra e dos métodos de desdobro utilizados. Para medir o volume para peças de tamanho específico é necessário construir um diagrama de como as peças serão serradas. A figura 5.9 apresenta dois diagramas aplicados a uma tora com o mesmo diâmetro. O diagrama é sempre aplicado na face de menor diâmetro, e a área útil (área do diagrama) nesta face é multiplicado pelo comprimento da tora para se obter o volume útil.

Ao construir o diagrama para peças específicas dois pontos devem ser considerados de antemão:

- a maneira como a tora será desdobrada, isto é, a espessura e localização das peças, e
- a espessura da serra a ser utilizada.

Consideremos os exemplos da figura 5.9. Assumindo que a tora tem comprimento de 3.0 m e diâmetros dos extremos são 35 e 40 cm. O volume sólido da tora por Smalian em ambos os exemplos é:

$$\begin{aligned} v &= \frac{\pi}{80000}\left(d_B^2 + d_h^2\right) l \\ &= 0.00003927\left(40^2 + 35^2\right) 3.0 = 0.3328 \approx 330 \text{ dm}^3. \end{aligned}$$

Se esta tora for desdobrada pelo exemplo (a), a área total das peças na face menor será de 700 cm^2, com um volume útil de

$$v_{\text{a}} = 0.0775 \times 3.0 = 0.2325 \approx 230 \text{ dm}^3$$

Se, por outro lado, a tora for desdobrada pelo exemplo (b), o volume útil é

$$v_{\text{b}} = 0.0650 \times 3.0 = 0.1950 \approx 200 \text{ dm}^3$$

Assim, o exemplo (a) representa uma utilização de 70% do volume total, enquanto que no exemplo (b) o rendimento é de 61%.

5.4.4 Volume Útil para Laminação.

A laminação por torno de rotação é o processo pelo qual se extrai da madeira roliça lâminas de madeira que podem ser utilizadas na construção de painéis compensados. O processo de laminação se assemelha ao “desenrolar de um carretel de linha”, onde a “linha” sendo desenrolada é na verdade uma lâmina de madeira e o carretel é o tronco.

Inicialmente, a tora passa pelo processo de “arredondamento”, tornando-a perfeitamente cilíndrica pela retirada da diferença entre o diêmtro da maior face (d_{MAX}) e o diâmetro da menor face (d_{MIN}). Assim, o volume inicial:

$$v = \left(\frac{\pi}{40000}\right) d_{\text{MAX}}\, d_{\text{MIN}}$$

é reduzido para

$$v_{\text{ÚTIL TORA}} = \left(\frac{\pi}{40000}\right) d_{\text{MIN}}^2\, l$$

O volume para laminação é a diferença entre este volume útil da tora e o volume cilíndrico definido pelo diâmetro mínimo que o torno consegue laminar ($d_{\text{RESTO ROLO}}$), chamado “resto rolo”:

$$\begin{aligned} v_{\text{RESTO ROLO}} &= \left(\frac{\pi}{40000}\right) d_{\text{RESTO ROLO}}^2\, l \\ v_{\text{LÂMINA}} &= v_{\text{ÚTIL TORA}} - v_{\text{RESTO ROLO}} = \frac{\pi}{40000}\left(d_{\text{MIN}}^2 - d_{\text{RESTO ROLO}}^2\right) l \end{aligned}$$

onde $v_{\text{ÚTIL TORA}}$ é, na verdade, o volume cilíndrico com base em d_{MIN}, e $v_{\text{RESTO ROLO}}$ é o volume do “miolo final” não aproveitado na laminação.

Outras informações sobre o processo de laminação podem ser obtidas a partir do volume útil. O comprimento da lâmina ($c_{\text{LÂMINA}}$) é a área útil ($s_{\text{ÚTIL}}$) divida pela espessura (e) da lâmina. Onde a área útil é a área na face menor da tora delimitada pelo d_{MIN} e o $d_{\text{RESTO ROLO}}$:

$$c_{\text{LÂMINA}} = \frac{s_{\text{ÚTIL}}}{e} = \frac{(\pi/40000)\left(d_{\text{MIN}}^2 - d_{\text{RESTO ROLO}}^2\right)}{e}$$

CAPÍTULO 6

RELAÇÃO HIPSOMÉTRICA

Relação hipsométrica é o nome dado à relação entre o DAP e a altura de árvores, sendo frequentemente utilizada para estimar a altura de árvores que tiveram apenas o DAP medido em campo. A relação hipsométrica é o modelo dendrométrico de construção mais simples e, geralmente, produz excelentes estimativas da altura das árvores, particularmente no caso de florestas plantadas. Tais resultados permitem que, em levantamentos florestais, apenas um sub-conjunto das árvores medidas em campo necessitem ter sua altura medida, aumentando a velocidade dos levantamentos e reduzindo o seu custo.

6.1 Relação Diâmetro-Altura

A relação diâmetro-altura também expressa uma série de processos biológicos envolvendo a floresta: Se a relação envolve árvores com diferentes idades, ela expressa um padrão de crescimento das árvores em termos de crescimento primário (crescimento em altura) e crescimento secundário (crescimento em diâmetro). No caso de árvores de mesma idade numa floresta plantada, a relação diâmetro-altura representa um padrão da estrutura de tamanho da floresta, mostrando a existência ou ausência de uma estratificação vertical e a homogeneidade do tamanho das árvores.

Por representar uma padrão biológico, diversos fatores influenciam a relação diâmetro-altura:

Estrutura da floresta: Floresta coetâneas (árvores de mesma idade) e dissetâneas (árvores de diferentes idades) apresentam relação diâmetro-altura diferentes pois o processo de crescimento e competição entre as árvores é bastante distinto. Em florestas coetâneas esta relação tende a ser linear dada a maior homogeneidade das árvores, enquanto que em florestas dissetâneas a relação se apresenta mais na forma sigmoidal.

Idade da Floresta: Uma floresta coetânea apresentará diferentes relações diâmetro-altura ao longo da sua existência porque a prioridade entre crescimento primário e secundário muda com a idade das árvores. Em florestas jovens o crescimento primário tem prioridade sobre o secundário resultando em relações com inclinação mais acentuada que em florestas mais velhas onde o crescimento em altura está próximo a estagnação mas o crescimento em diâmetro continua.

Espécie/material genético: A relação diâmetro-altura é específica pois estabelece uma associação entre os componentes da estutura da árvore, envolvendo o comprimento do tronco e da copa, a produção de meristemas primários e secundários, e a relação entre o xilema e o floema. O padrão de desenvolvimento das espécies como forma monopodial/simpodial da copa, tolerante/intolerante, crescimento rápido/crescimento lento, também afeta a relação. Desta forma, espécies diferentes tendem a possuir relações diferentes, sempre havendo uma grande amplitude para variações dentro da espécie, em função da variabilidade genética que envolve procedências, progênies e clones.

Qualidade do Sítio: Mesmo considerando-se uma mesma espécies (e material genético) e árvores com a mesma idade, o ambiente tem forte efeito sobre o padrão de desenvolvimento das árvores e, consequentemente, sobre a relação diâmetro altura. Solos pobres e regiões de fortes deficit hidrico tendem a possuir árvores relativas mais baixas e proporcionalmente de maior diâmetro que solos férteis em regiões com boa disponibilidade de água para o crescimento das árvores.

6.2 Modelos de Relação Hipsométrica

Existe um grande número de modelos para relações hipsométricas, sendo impossível dizer de antemão o modelo mais apropriado para cada situação. Em geral, a construção de uma relação hipsométrica envolve o teste de alguns modelos diferentes, escolhendo aquele que apresenta melhor ajuste e explicação biológica apropriada para a situação em estudos.

Os principais modelos encontrados na literatura são:

Modelos Lineares Simples:

$$\begin{aligned}
h &= \beta_0 + \beta_1 d + \varepsilon \\
\frac{1}{\sqrt{h - 1.30}} &= \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{d} + \varepsilon \\
h &= \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{d^2} + \varepsilon \\
\log(h) &= \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{d} + \varepsilon \\
\log(h) &= \beta_0 + \beta_1 \log(d) + \varepsilon \\
\log(h - 1.30) &= \beta_0 + \beta_1 \log\left(\frac{d}{1+d}\right) + \varepsilon
\end{aligned}$$

Modelos Lineares Múltiplos:

$$h = \beta_0 + \beta_1 d + \beta_2 d^2 + \varepsilon$$

$$
\begin{aligned}
h &= \beta_0 + \beta_1 d + \beta_2 d^2 + \beta_2 d^3 + \varepsilon \\
\frac{1}{h - 1.30} &= \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{d} + \beta_2 \frac{1}{d^2} + \varepsilon \\
\frac{d^2}{\sqrt{h} - 1.30} &= \beta_0 + \beta_1 d + \beta_2 d^2 + \varepsilon \\
\log\left(\frac{1}{h - 1.30}\right) &= \beta_0 + \beta_1 \log(d) + \beta_2 \log^2(d) + \varepsilon
\end{aligned}
$$

Os modelos que envolvem transformação logarítmica são apropriados onde a relação diâmetro-altura não é perfeitamente linear, isto é, na forma de uma reta, o que acontece frequentemente, a exceção de florestas plantadas e com alto grau de homogeneidade. A transformação logarítmica da altura e transformações do inverso do DAP tendem a produzir modelos lineares que se aproximam do formato sigmoidal. Modelos com formato sigmoidal propriamente dito são modelos não-lineares exigindo métodos de ajuste mais sofisticados que regressão linear e, portanto, estão além do escopo deste curso.

CAPÍTULO 7

ESTIMANDO O VOLUME DE ÁRVORES

7.1 Tipos de Volume de Árvores

Quando falamos no volume de uma árvore podemos nos referir a 3 tipos de volume.

a. **Volume Cilíndrico (v_{CIL}):** é o volume hipotético de uma árvore, supondo que o tronco é um cilíndro cujo diâmetro é o diâmetro do tronco a 1.30 m (DAP = Diâmetro à Altura do Peito), e a altura é a altura total do tronco. Normalmente é expresso em m^3.

b. **Volume Empilhado (v_e):** é o volume de madeira utilizável de uma ou mais árvores, quando os troncos são cortados em toretes e empilhados. Esse volume é medido por uma unidade chamada *estéreo* ou *estere real* (1 st = 1 m^3 de madeira empilhada).

c. **Volume Sólido (v):** é o volume da árvore expresso em m^3. Ele pode ser *total* quando se refere a todo volume de madeira da árvore, ou *comercial* quando se refere ao volume utilizável para uma finalidade específica, por exemplo volume comercial para serraria. Pode ser apresentado como volume *com casca*, isto é, incluindo o volume da casca, ou como volume *sem casca*.

Enquanto o volume cilíndrico depende somente de características de fácil medição na árvore (altura total e DAP), os volumes sólido e empilhado dependem da forma do tronco da árvore e também do que consideramos "utilizável" da madeira da árvore. Portanto, uma mesma árvore terá diferentes volumes sólidos se for destinada à produção de madeira serrada ou de celulose. A figura 7.1 mostra a relação entre esses tipos de volume.

O volume cilíndrico de uma árvore é calculado utilizando-se a fórmula:

$$v_{\text{CIL}} = \left(\frac{\pi}{40000}\right) d^2\, h.$$

Assim, para se determinar o volume cilíndrico não é necessário derrubar a árvore, basta medir o DAP (d) e a altura total (h) da árvore em pé.

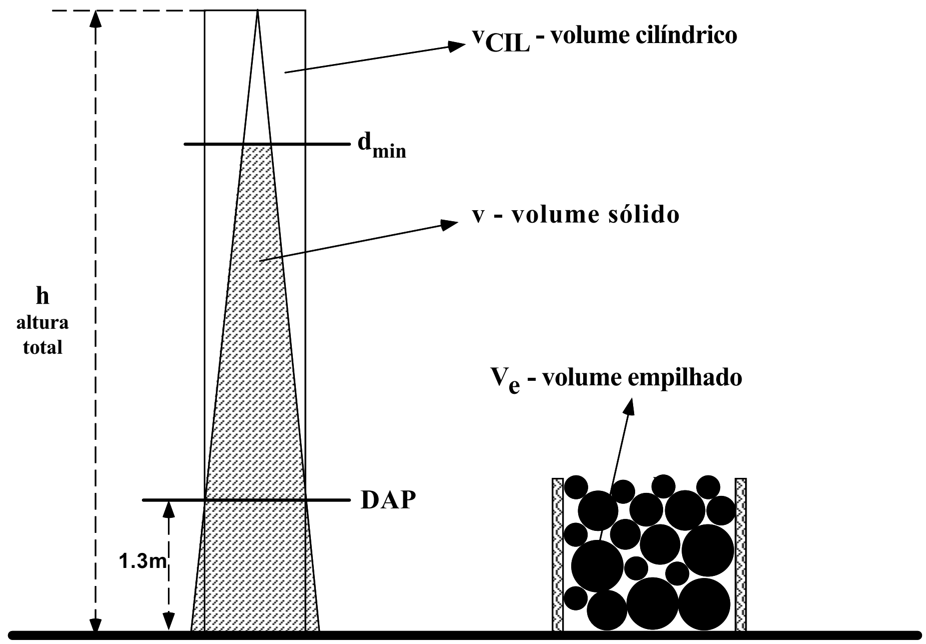

Figura 7.1: Tipos de volumes de árvores.

7.2 Cálculo de Fatores

A partir dos volumes obtidos em árvores abatidas é possível se calcular alguns fatores úteis para a estimativa do volume de árvores em pé.

Algumas relações entre o volume cilíndrico (v_{CIL}), volume sólido (v) e volume empilhado (v_e) são expressas na forma de *fatores*. Os fatores permitem a obtenção de um dos volumes a partir de outro. O *fator de forma* (f) é expresso pela razão:

$$f = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i}{\sum_{i=1}^{n} v_{\text{CIL};i}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i}{\sum_{i=1}^{n} g_i\, h_i}$$

onde n é o numero de árvores abatidas, v_i e $v_{\text{CIL};i}$ são os volumes sólido e cilíndrico da $i^{\text{ésima}}$ árvore, respectivamente.

O fator de forma permite obter o volume sólido de uma árvore em pé medindo-se apenas o seu DAP e altura. Como o fator de forma varia de árvore para árvore é necessário determiná-lo para várias árvores abatidas (no mínimo 10) e utilizar uma média. As árvores escolhidas para o cálculo do fator de forma devem representar bem todas as classes de tamanho de árvores presentes na floresta. Assim, a amostra de árvores para cálculo do fator de forma deve conter um número de árvores grandes, médias e pequenas que seja proporcional ao número dessas árvores na floresta.

É comum a comercialização de madeira de pequenas dimensões, normalmente utilizada para lenha e carvão, com base nas pilhas de madeira no campo após a exploração.

O *fator de empilhamento* (f_e) é a forma de converter o v de madeira em pé na floresta em volume de madeira empilhada. O f_e é calculado pela razão:

$$f_e = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_{e;i}}{\sum_{i=1}^{n} v_i}$$

onde os termos são iguais aos da fórmula anterior.

O f_e é muito influenciado pela forma do tronco, pelo diâmetro dos toretes e pelo método de empilhamento (manual ou mecânico), de modo que não deve ser generalizado para muitas situações. Ele deve ser determinado para o talhão particular onde será utilizado.

7.2.1 Fatores e o Volume de Árvores em Pé

Há duas formas básicas de se estimar o volume de árvores em pé. A primeira delas é calcular o v_{CIL} a partir das medições do DAP e altura e convertê-lo em volume sólido e volume empilhado usando os fatores de forma e de empilhamento, respectivamente. Assim as fórmulas ficam:

$$v_{\text{CIL}} = g\,h = \left(\frac{\pi}{40000}\right) d^2 h \tag{7.1}$$

$$v = v_{\text{CIL}}\, f = g\,h\,f = \left(\frac{\pi}{40000}\right) d^2 h\, f \tag{7.2}$$

$$v_e = v\, f_e = g\,h\,f\,f_e = \left(\frac{\pi}{40000}\right) d^2 h\, f\, f_e \tag{7.3}$$

Esse método exige que os fatores (f e f_e) tenham sido determinados para a situação de trabalho.

7.3 Tabelas e Equações de Volume

O outro método de se estimar o volume de árvores em pé é o uso de equações de volume ou tabelas de volume. Essas equações ou tabelas são produzidas previamente para diversas regiões e espécies de árvores e são publicadas na literatura técnica. Numa equação de volume, o volume sólido é expresso em função do DAP e altura da árvore. Alguns exemplos são:

- Volume para serraria de espécies nativas da Amazônia:

$$v = 0,0757378 + 0,57531689(d^2 h)$$

- Volume para celulose de *Pinus elliotti* var. *elliotti* no Estado de São Paulo:

$$v = 0,001907 + 0,290275(d^2 h)$$

A tabela de volume nada mais é que a transformação da fórmula em um quadro de dupla entrada onde o DAP está na linha e a altura nas colunas (ou vice-versa), estando o volume nas intersecções entre linhas e colunas (tabela 1).

Tabela 7.1: Exemplo de uma tabela de volume comercial de madeira com casca.

DAP (cm2)	Altura (m)																			
	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
11	0.0418	0.0487	0.0557	0.0627	0.0696	0.0766	0.0835	0.0905	0.0975	0.1044	0.1114	0.1184	0.1253	0.1323	0.1392	0.1462	0.1532	0.1601	0.1671	0.1740
13	0.0583	0.0681	0.0778	0.0875	0.0972	0.1070	0.1167	0.1264	0.1361	0.1459	0.1556	0.1653	0.1750	0.1847	0.1945	0.2042	0.2139	0.2236	0.2334	0.2431
15	0.0777	0.0906	0.1036	0.1165	0.1295	0.1424	0.1553	0.1683	0.1812	0.1942	0.2071	0.2201	0.2330	0.2460	0.2589	0.2718	0.2848	0.2977	0.3107	0.3236
17	0.0998	0.1164	0.1330	0.1496	0.1663	0.1829	0.1995	0.2162	0.2328	0.2494	0.2660	0.2827	0.2993	0.3159	0.3325	0.3492	0.3658	0.3824	0.3990	0.4157
19	0.1246	0.1454	0.1662	0.1869	0.2077	0.2285	0.2492	0.2700	0.2908	0.3115	0.3323	0.3531	0.3738	0.3946	0.4154	0.4362	0.4569	0.4777	0.4985	0.5192
21	0.1522	0.1776	0.2030	0.2284	0.2537	0.2791	0.3045	0.3298	0.3552	0.3806	0.4060	0.4313	0.4567	0.4821	0.5074	0.5328	0.5582	0.5836	0.6089	0.6343
23	0.1826	0.2130	0.2435	0.2739	0.3044	0.3348	0.3652	0.3957	0.4261	0.4565	0.4870	0.5174	0.5478	0.5783	0.6087	0.6391	0.6696	0.7000	0.7304	0.7609
25	0.2158	0.2517	0.2877	0.3236	0.3596	0.3955	0.4315	0.4675	0.5034	0.5394	0.5753	0.6113	0.6472	0.6832	0.7192	0.7551	0.7911	0.8270	0.8630	0.8989
27	0.2517	0.2936	0.3355	0.3775	0.4194	0.4614	0.5033	0.5452	0.5872	0.6291	0.6711	0.7130	0.7549	0.7969	0.8388	0.8808	0.9227	0.9646	1.0066	1.0485
29	0.2903	0.3387	0.3871	0.4355	0.4838	0.5322	0.5806	0.6290	0.6774	0.7258	0.7742	0.8225	0.8709	0.9193	0.9677	1.0161	1.0645	1.1128	1.1612	1.2096
31	0.3317	0.3870	0.4423	0.4976	0.5529	0.6082	0.6635	0.7188	0.7740	0.8293	0.8846	0.9399	0.9952	1.0505	1.1058	1.1611	1.2163	1.2716	1.3269	1.3822
33	0.3759	0.4386	0.5012	0.5639	0.6265	0.6892	0.7518	0.8145	0.8771	0.9398	1.0024	1.0651	1.1277	1.1904	1.2530	1.3157	1.3784	1.4410	1.5037	1.5663
35	0.4229	0.4933	0.5638	0.6343	0.7048	0.7752	0.8457	0.9162	0.9867	1.0572	1.1276	1.1981	1.2686	1.3391	1.4095	1.4800	1.5505	1.6210	1.6914	1.7619
37	0.4726	0.5513	0.6301	0.7089	0.7876	0.8664	0.9451	1.0239	1.1027	1.1814	1.2602	1.3389	1.4177	1.4965	1.5752	1.6540	1.7327	1.8115	1.8903	1.9690
39	0.5250	0.6125	0.7001	0.7876	0.8751	0.9626	1.0501	1.1376	1.2251	1.3126	1.4001	1.4876	1.5751	1.6626	1.7501	1.8376	1.9251	2.0126	2.1001	2.1877
41	0.5803	0.6770	0.7737	0.8704	0.9671	1.0638	1.1605	1.2572	1.3540	1.4507	1.5474	1.6441	1.7408	1.8375	1.9342	2.0309	2.1276	2.2244	2.3211	2.4178
43	0.6383	0.7446	0.8510	0.9574	1.0638	1.1701	1.2765	1.3829	1.4893	1.5956	1.7020	1.8084	1.9148	2.0212	2.1275	2.2339	2.3403	2.4467	2.5530	2.6594
45	0.6990	0.8155	0.9320	1.0485	1.1650	1.2815	1.3980	1.5145	1.6310	1.7475	1.8640	1.9805	2.0970	2.2135	2.3300	2.4465	2.5630	2.6795	2.7960	2.9125
47	0.7625	0.8896	1.0167	1.1438	1.2709	1.3980	1.5251	1.6521	1.7792	1.9063	2.0334	2.1605	2.2876	2.4147	2.5418	2.6688	2.7959	2.9230	3.0501	3.1772
49	0.8288	0.9669	1.1051	1.2432	1.3813	1.5195	1.6576	1.7957	1.9339	2.0720	2.2101	2.3483	2.4864	2.6245	2.7627	2.9008	3.0389	3.1771	3.3152	3.4533
51	0.8978	1.0475	1.1971	1.3468	1.4964	1.6460	1.7957	1.9453	2.0950	2.2446	2.3942	2.5439	2.6935	2.8432	2.9928	3.1424	3.2921	3.4417	3.5914	3.7410
53	0.9696	1.1313	1.2929	1.4545	1.6161	1.7777	1.9393	2.1009	2.2625	2.4241	2.5857	2.7473	2.9089	3.0705	3.2321	3.3937	3.5554	3.7170	3.8786	4.0402
55	1.0442	1.2182	1.3923	1.5663	1.7403	1.9144	2.0884	2.2624	2.4365	2.6105	2.7845	2.9586	3.1326	3.3066	3.4807	3.6547	3.8287	4.0028	4.1768	4.3508
57	1.1215	1.3085	1.4954	1.6823	1.8692	2.0561	2.2431	2.4300	2.6169	2.8038	2.9907	3.1777	3.3646	3.5515	3.7384	3.9253	4.1123	4.2992	4.4861	4.6730
59	1.2016	1.4019	1.6022	1.8024	2.0027	2.2030	2.4032	2.6035	2.8038	3.0040	3.2043	3.4046	3.6048	3.8051	4.0054	4.2056	4.4059	4.6062	4.8064	5.0067
61	1.2845	1.4985	1.7126	1.9267	2.1408	2.3548	2.5689	2.7830	2.9971	3.2111	3.4252	3.6393	3.8534	4.0674	4.2815	4.4956	4.7097	4.9237	5.1378	5.3519
63	1.3701	1.5984	1.8268	2.0551	2.2834	2.5118	2.7401	2.9685	3.1968	3.4252	3.6535	3.8818	4.1102	4.3385	4.5669	4.7952	5.0236	5.2519	5.4802	5.7086
65	1.4584	1.7015	1.9446	2.1877	2.4307	2.6738	2.9169	3.1599	3.4030	3.6461	3.8891	4.1322	4.3753	4.6184	4.8614	5.1045	5.3476	5.5906	5.8337	6.0768
67	1.5496	1.8078	2.0661	2.3243	2.5826	2.8409	3.0991	3.3574	3.6156	3.8739	4.1322	4.3904	4.6487	4.9069	5.1652	5.4235	5.6817	5.9400	6.1982	6.4565
69	1.6435	1.9174	2.1913	2.4652	2.7391	3.0130	3.2869	3.5608	3.8347	4.1086	4.3825	4.6564	4.9304	5.2043	5.4782	5.7521	6.0260	6.2999	6.5738	6.8477
71	1.7401	2.0301	2.3201	2.6102	2.9002	3.1902	3.4802	3.7702	4.0602	4.3503	4.6403	4.9303	5.2203	5.5103	5.8004	6.0904	6.3804	6.6704	6.9604	7.2504
73	1.8395	2.1461	2.4527	2.7593	3.0659	3.3725	3.6790	3.9856	4.2922	4.5988	4.9054	5.2120	5.5186	5.8251	6.1317	6.4383	6.7449	7.0515	7.3581	7.6647
75	1.9417	2.2653	2.5889	2.9125	3.2362	3.5598	3.8834	4.2070	4.5306	4.8542	5.1779	5.5015	5.8251	6.1487	6.4723	6.7959	7.1196	7.4432	7.7668	8.0904
77	2.0466	2.3877	2.7289	3.0700	3.4111	3.7522	4.0933	4.4344	4.7755	5.1166	5.4577	5.7988	6.1399	6.4810	6.8221	7.1632	7.5043	7.8454	8.1865	8.5276
79	2.1543	2.5134	2.8724	3.2315	3.5906	3.9496	4.3087	4.6677	5.0268	5.3858	5.7449	6.1039	6.4630	6.8221	7.1811	7.5402	7.8992	8.2583	8.6173	8.9764

7.3.1 Princípio e Tipos de Tabelas de Volume

O princípio florestal em que se baseiam as tabelas/equações de volume foi enunciado por Cotta no século XIX:

> *"O volume de uma árvore depende do seu diâmetro, altura e forma. Se o volume de uma árvore é corretamente determinado, ele será válido para outras árvores com o mesmo diâmetro, altura e forma."*

Com base neste princípio, podemos construir tabelas de volume utilizando árvores abatidas nas quais o volume é corretamente determinado. A partir de medidas diretas do diâmetro, altura e forma, podemos estimar o volume de árvores em pé a partir dos resultados das tabelas de volume.

Os tipos de tabela de volume são:

Tabelas Locais: são tabelas que se referem a condições extremamente específicas, onde quase não há variação na altura e forma das árvores com o mesmo DAP. Nestas condições, o DAP pode ser suficiente para se estimar o volume da árvore. Nas tabelas de volume, é comum se utilizar classes de DAP de 2 cm de amplitude para árvores de florestas plantadas e classes de 5 cm para árvores de florestas nativas.

Tabelas de Dupla-Entrada: são tabelas onde o volume é obtido a partir de medidas do DAP e da altura (total ou comercial) das árvores. Estas tabelas são mais abrangentes podendo englobar árvores de uma espécie localizadas em locais que diferem em termos de sítio (solo, mesoclima, topografia, face de exposição, etc.), espaçamento e manejo florestal. Dificilmente, entretanto, as tabelas de dupla-entrada conseguem representar com boa precisão árvores provenientes de florestas com diferentes idades e de diferentes rotações.

A variação de forma que pode existir para árvores com mesmo DAP e altura não é incorporada nesta tabela, mas como o medição da forma é tarefa complexa, as tabelas de dupla-entrada acabam sendo as tabelas mais utilizadas na prática. A tabela 7.1 é uma tabela de dupla entrada.

Tabelas de Classe de Forma: são as tabelas mais abrangentes possíveis pois classificam as árvores em termos de DAP, altura e forma. A forma é geralmente medida através do *Quociente de Forma* que é a razão entre um diâmetro medido acima da altura do peito (1.30 m) e o DAP. O quociente de forma mais utilizada é chamado de *Quociente de Forma de Girard* é calculado por

$$q_{\text{G}} = \frac{[\text{diâmetros sem casca, no topo da 1}^{\underline{\text{a}}}\text{ tora}]}{d}$$

O *Quociente Normal de Forma* também é utilizado para representar a forma das árvores, mas sua medição é mais difícil:

$$q_{\text{N}} = \frac{d_{h/2}}{d}$$

7.3.2 Modelos de Equações de Volume

Existe uma grande quantidade de modelos para equações/tabelas de volume. Segue abaixo uma lista dos principais modelos na literatura florestal

A. Equações Locais

$$\begin{aligned}
v &= \beta_0 + \beta_1 d + \varepsilon \\
v &= \beta_0 + \beta_2 d^2 + \varepsilon \\
v &= \beta_0 + \beta_1 d + \beta_2 d^2 + \varepsilon \\
v &= \beta_1 d + \beta_2 d^2 + \varepsilon \\
\ln(v) &= \beta_0 + \beta_1 \ln(d) + \varepsilon \\
\ln(v) &= \beta_0 + \beta_1 \ln(d) + \beta_2 (1/d) + \varepsilon
\end{aligned}$$

B. Equações de Dupla Entrada .

Modelo da Variável Combinada de Spurr:

$$\begin{aligned}
v &= \beta_0 + \beta_1 d^2 h + \varepsilon \\
v &= \beta_1 d^2 h + \varepsilon \\
\ln(v) &= \beta_0 + \beta_1 \ln(d^2 h) + \varepsilon
\end{aligned}$$

Modelo de Schumacher-Hall:

$$\begin{aligned}
v &= \beta_0 d^{\beta_1} h^{\beta_2} + \varepsilon \\
\ln(v) &= \beta_0 + \beta_1 \ln(d) + \beta_2 \ln(h) + \varepsilon
\end{aligned}$$

Equação Australiana de Soate:

$$v = \beta_0 + \beta_1 d^2 + \beta_2 d^2 h + \beta_3 h + \varepsilon$$

Equação de Meyer:

$$v = \beta_0 + \beta_1 d + \beta_2 d^2 + \beta_3 dh + \beta_4 d^2 h + \beta_5 h + \varepsilon$$

Equação de Meyer modificada:

$$v = \beta_0 + \beta_1 d + \beta_2 d^2 + \beta_3 dh + \beta_4 d^2 h + \varepsilon$$

Equação de Näslund:

$$v = \beta_0 + \beta_1 d^2 + \beta_2 d^2 h + \beta_3 dh^2 + \beta_4 h^2 + \varepsilon$$

Equação de Takata (Finger, 1992):

$$v = \frac{d^2 h}{\beta_0 + \beta_1 d} + \varepsilon$$

C. Equações de Classe de Forma .

Modelos de Spurr:

$$\begin{aligned}
v &= \beta_0 + \beta_1 q_{\rm G}(d^2 h) + \varepsilon \\
v &= \beta_0 + \beta_1 q_{\rm G} + \beta_2 (d^2 h) + \beta_3 q_{\rm G}(d^2 h) + \varepsilon \\
\ln(v) &= \beta_0 + \beta_1 \ln(d) + \beta_2 \ln(h) + \beta_3 \ln(d_i) + \varepsilon \\
\ln(v) &= \beta_0 + \beta_1 \ln(d_i\, d\, h) + \varepsilon
\end{aligned}$$

Modelo de Schiffel:

$$v = d^2 h \left(\beta_0 + \beta_1 q_{\rm N} + \beta_2 \frac{1}{q_{\rm N} h} \right) + \varepsilon$$

Modelo de Ogaya:

$$v = \beta_0 + \beta_1 d_{h/2} + \beta_2 d\, h + \varepsilon$$

Modelo de Pollonshutz:

$$v = (\pi/4) \left[\beta_1 d^2 h + \beta_2 d\, d_{0.3h} + \beta_3 h^2 \right] + \varepsilon$$

7.4 Construção de Tabelas de Volume

Algums aspectos fundamentais na construção de tabelas de volume envolvem:

- Realizar um levantamento prévio na floresta da distribuição das árvores por classes de DAP. Amostrar árvores para a construção da tabela em todas as classes de DAP de modo uniforme, isto é, aproximadamente o mesmo número de árvores em todas as classes.
- O número de árvores necessário para a construção de tabelas de volume depende da situação sendo estudada. Em florestas plantadas quando uma alta precisão é necessária é recomendável de 100 a 150 árvores para tabelas locais e no mínimo 150 para tabelas de dupla entrada.
- A amplitude de variação dos dados de DAP, altura e volume deve ser registrada, para evitar extrapolação no uso de equações de volume.
- Durante a cubagem das árvores amostradas para a construção, especial cuidado deve ser tomada quanto ao diâmetro mínimo que define os toretes do volume comercial. Sempre que possível determinar também o volume total das árvores.
- Embora no passado se tenha utilizado métodos gráficos para a construção de tabelas de volume, a regressão linear (método dos quadrados mínimos) é a técnica que atualmente deve ser utilizada.

7.4.1 Etapas na Construção de Tabelas de Volume

1. Estudar a distribuição das variáveis de predição, principalmente DAP e altura.
2. Realizar a amostragem das árvores por classes de DAP de modo uniforme.
3. Cubagem rigorosa das árvores.
4. Registrar a amplitude de variação dos dados: volume, DAP, altura e quociente de forma.
5. Ajustar vários modelos de equação de volume aos dados por regressão linear. Escolher o modelo que apresentar o melhor ajuste (não esquecer as pressuposições da regressão linear).
6. Elaborar a tabela a partir da equação escolhida. Este passo atualmente é dispensável dada a disseminação do uso de calculadoras e computdores.
7. Adicionar à tabela informações que caracterizem a situação para qual ela foi construída:
   - Espécie ou grupo de espécies arbóreas;
   - Localidade, idade e informações silviculturais da floresta;
   - Definição clara das variáveis incluindo as UNIDADES DE MEDIDA;
   - No caso do volume definir se é volume sólido ou empilhado, total ou comercial (até qual diâmetro mínimo), com casca ou sem casca e altura do corte da árvore no abate;
   - Tamanho da amostra, isto é, número de árvores cubadas;
   - Amplitude de variação das variáveis;
   - Método de cubagem e medição das variáveis;
   - Medidas apropriadas da qualidade do modelo ajustado por regressão linear, como por exemplo: valor e significância do teste F, Coeficiente de Determinação e Erro Padrão da Estimativa ($= \sqrt{QMR/n}$).
   - Autor e data da construção da tabela.

CAPÍTULO 8

SORTIMENTO DA MADEIRA

A madeira produzida por uma floresta costuma ser utilizada para diversos fins. Uma mesma floresta plantada pode gerar toras para serraria, toretes para produção de celulose e lenha para utilização doméstica ou industrial. Em geral, a utilização da madeira está ligada às dimensões das toras. Toras de maiores dimensões são utilizadas para serraria e aplicada a fins mais nobres, como estruturas de madeira e movelaria, tornando-as, portanto, mais valiosas. Toras de pequena dimensão são de utilização restrita servindo apenas à fabricação de carvão vegetal ou lenha e, consequentemente, têm menor valor comercial.

Quando a madeira de uma floresta se destina a usos mútliplos, a estimativa do volume de madeira das árvores envolve não só o volume comercial total, mas também o volume para cada um dos usos. Neste caso, a toragem das árvores (processo de subdividir o tronco em toras) é mais complexa e a estimativa do volume deve considerar como o tronco será subdivido. Existe duas abordagens principais para estimar múltiplos volumes de árvores individuais. O primeiro constrói modelos da forma do tronco (equações de forma), tornando possível simular a toragem do tronco e estimar o volume das secções do tronco destinada as diferentes usos. O segundo constrói equações indídices relacionando o volume comercial e diâmetro mínimo de utilização (d_{MIN}) ou altura comercial (h_c). Ambas abordagens são utilizadas, pois resultam num sistema de sortimento coerente.

8.1 Sistema de Sortimento Coerente

O conceito de sistema de sortimento coerente é bastante simples, sendo melhor compreendido com um exemplo. Suponhamos que o proprietário de uma floresta deseja utilizar a madeira produzida por ela segundo os seguintes critérios:

1. Toras com diâmetro mínimo (d_{MIN}) acima de 30 cm são destinadas à serraria.
2. Toras com d_{MIN} entre 30 e 20 cm são destinadas à venda para fábrica de celulose.
3. Toras com d_{MIN} entre 20 e 10 cm são utilizadas como lenha.
4. Toras com d_{MIN} abaixo de 10 cm são resíduo (sem utilização).

Um engenheiro florestal contratado para estimar a produção desta floresta decidiu construir o seguinte sistema de equações para estimar o volume das árvores individualmente:

$$\begin{aligned}
\text{Volume total:} \quad & v && = \beta_0 + \beta_1\, d^2\, h + \varepsilon \\
\text{Volume para serraria:} \quad & v_{\text{S}} && = \beta_2 + \beta_3\, d^2\, h + \varepsilon_{\text{S}} \\
\text{Volume para fibra:} \quad & v_{\text{F}} && = \beta_4 + \beta_5\, d^2\, h + \varepsilon_{\text{F}} \\
\text{Volume para lenha:} \quad & v_{\text{L}} && = \beta_6 + \beta_7\, d^2\, h + \varepsilon_{\text{L}} \\
\text{Volume residual:} \quad & v_{\text{R}} && = \beta_8 + \beta_9\, d^2\, h + \varepsilon_{\text{R}}
\end{aligned}$$

Desta forma, o florestal terá que estimar dez parâmetros por regressão linear. Note que nas regressões os termos do erro estatístico não são os mesmos, pois cada equação é estimada independentemente das demais.

O bom senso nos diz que a soma dos volumes dos usos, incluindo o resíduo, deveria ser igual ao total. Portanto, espera-se que as estimativas geradas pelo sistema tenha a propriedade de:

$$\widehat{v} = \widehat{v}_{\text{S}} + \widehat{v}_{\text{F}} + \widehat{v}_{\text{L}} + \widehat{v}_{\text{R}}$$

No entanto, nada há no processo de ajuste das equações que nos garanta que isto será verdadeiro. É praticamente impossível a expressão acima ser verdadeira se as equações forem ajustadas de modo independente. Tal sistema de equações será sempre "incoerente".

8.2 Sistema Coerente com diversas Regressões

Uma forma de se obter uma sistema de sortimento coerente utilizando o exemplo anterior é partir da idéia de que o volume total pode ser obtido pela soma dos volumes para os diversos usos e o volume residual. Logo, o volume não precisa ser estimado e o sistema de equações se torna:

$$\begin{aligned}
\text{Volume para serraria:} \quad & v_{\text{S}} && = \beta_0 + \beta_1\, d^2\, h + \varepsilon_{\text{S}} \\
\text{Volume para fibra:} \quad & v_{\text{F}} && = \beta_2 + \beta_3\, d^2\, h + \varepsilon_{\text{F}} \\
\text{Volume para lenha:} \quad & v_{\text{L}} && = \beta_4 + \beta_5\, d^2\, h + \varepsilon_{\text{L}} \\
\text{Volume residual:} \quad & v_{\text{R}} && = \beta_6 + \beta_7\, d^2\, h + \varepsilon_{\text{R}} \\
\text{Volume Total:} \quad & v && = v_{\text{S}} + v_{\text{F}} + v_{\text{L}} + v_{\text{R}} \\
& && = [\beta_0 + \beta_2 + \beta_4 + \beta_6] + [\beta_1 + \beta_3 + \beta_5 + \beta_7]\; d^2\, h
\end{aligned}$$

Esta abordagem tem a vantagem de manter a propriedade de aditividade, mas como o volume total é estimado somando-se uma série de estimativas, é muito difícil associar a ele uma medida de incerteza, como por exemplo um invervalo de confiança.

8.3 Equações de Forma

A equação da forma é uma equação que descreve a forma do tronco à medida que se desloca ao longo do tronco da base para o topo da árvore. A figura 8.1 apresenta uma ilustração de uma equação de forma, mostrando que existem algumas exigências básicas de coerência. Estas exigências são:

1. O diâmetro do tronco ($\vec{d}$) **decresce monotonicamente** com o aumento da altura ao longo do tronco a partir da base ($\vec{h}$).

2. Na base ($\vec{h} = 0$), o diâmetro do tronco é igual ao diâmetro da base ($\vec{d} = d_b$).

3. No DAP ($\vec{h} = 1.3$), o diâmetro do tronco é igual ao DAP ($\vec{d} = d$).

4. No topo ($\vec{h} = h$), o diâmetro do tronco é nulo ($\vec{d} = 0$).

Os melhores modelos de equação de forma satisfazem a todas estas exigências. Vejamos agora um modelo simples, que mesmo sem satisfazer todas as exigências pode produzir resultados razoáveis.

8.3.1 Modelo Parabólico de Kozak

Neste modelo, a razão entre a área seccional ao longo do tronco pela área seccional do DAP ($\vec{h} = 1.30$) é modelada como uma equação de segundo grau da razão da altura ao longo do tronco ($\vec{h}$) e a altura total. O modelo de ajuste estatístico fica na forma:

$$\left(\vec{d}/d\right)^2 = \beta_0 + \beta_1 \left(\vec{h}/h\right) + \beta_2 \left(\vec{h}/h\right)^2 + \varepsilon \tag{8.1}$$

Para que este modelo seja útil, devemos ajustá-lo para uma amostra de árvores que foram cubadas e depois aplicá-lo às árvores em pé. Assim o ajuste por regressão para equação de forma utiliza os mesmos dados gerados pelo processo de cubagem.

Para se estimar o diâmetro do tronco em função da altura, se utiliza a expressão:

$$\widehat{\vec{d}} = d \sqrt{\widehat{\beta_0} + \widehat{\beta_1} \left(\vec{h}/h\right) + \widehat{\beta_2} \left(\vec{h}/h\right)^2} \tag{8.2}$$

Note que o DAP (d) e altura total (h) são tomados como conhecidos, pois esta expressão será sempre aplicada a árvores individuais. A área seccional ao longo do tronco também pode ser apresentada como função da posição do tronco, bastando aplicar a fórmula da área do círculo sobre a expressão acima:

$$g(\vec{h}) = \frac{\pi}{40000} \, (\widehat{\vec{d}})^2 = \frac{\pi}{40000} \, d^2 \, \left[\widehat{\beta_0} + \widehat{\beta_1} \left(\vec{h}/h\right) + \widehat{\beta_2} \left(\vec{h}/h\right)^2\right]$$

Com base na área seccional fica fácil obter o volume do tronco em função da altura ao longo do tronco. O volume do tronco acumulado a partir da base da árvore resulta

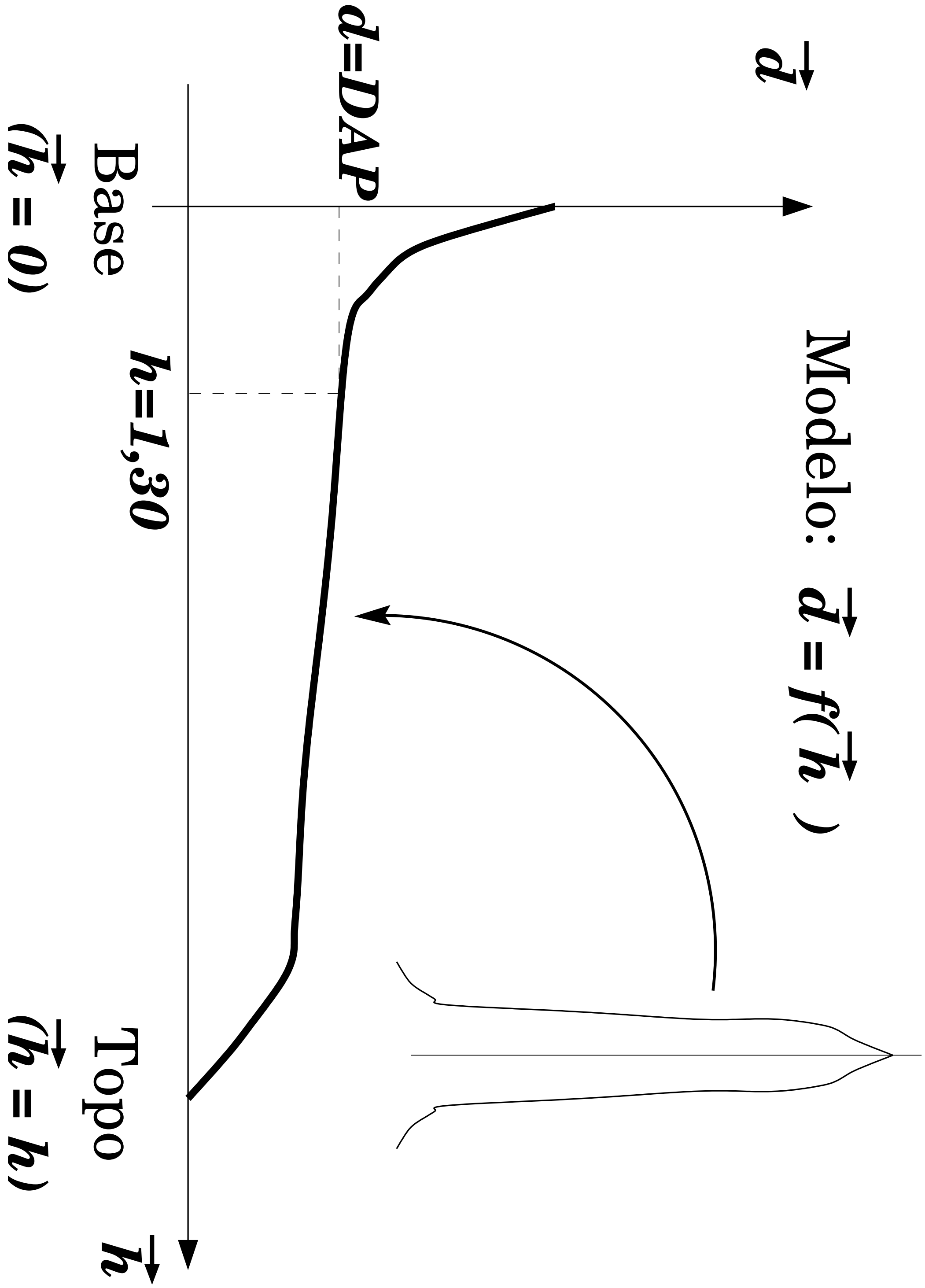

Figura 8.1: Equação de forma descrevendo a forma do tronco: o diâmetro ao longo do tronco ($\vec{d}$) é uma função da posição no tronco ($\vec{h}$). Condições de coerência de uma equação de forma: (a) para $\vec{h} = 1,30$, $\vec{d} = DAP$; (b) para $\vec{h} = h$, $\vec{d} = 0$.

da integração das áreas seccionais à medida que se deslocam da base para o topo da árvore. O volume sólido até uma dada altura comercial (h_c), portanto, é obtido por:

$$\begin{aligned} v(h_c) &= \int_0^{h_c} g(x)dx = \int_0^{h_c} \frac{\pi}{40000}\, d^2 \left[\widehat{\beta_0} + \widehat{\beta_1}\,(x/h) + \widehat{\beta_2}\,(x/h)^2\right] dx \\ &= \left(\frac{\pi}{40000}\right)\, d^2 \left[\widehat{\beta_0}(x) + \frac{\widehat{\beta_1}}{2h}(x)^2 + \frac{\widehat{\beta_2}}{3h^2}(x)^3\right]_0^{h_c} \end{aligned}$$

$$v(h_c) = \left(\frac{\pi}{40000}\right)\, d^2 \left[\widehat{\beta_0}(h_c) + \frac{\widehat{\beta_1}}{2h}(h_c)^2 + \frac{\widehat{\beta_2}}{3h^2}(h_c)^3\right] \tag{8.3}$$

Note que o volume comercial da árvore é função do DAP (d), da altura total (h), da altura comercial (h_c) e das estimativas dos parâmetros da equação de forma ($\widehat{\beta_0}; \widehat{\beta_1}; \widehat{\beta_2}$). Se a altura comercial for assumida como igual a altura total ($h_c = h$), a expressão acima nos fornecerá o volume total da árvore:

$$\begin{aligned} h_c = h \Rightarrow v &= \left(\frac{\pi}{40000}\right)\, d^2 \left[\widehat{\beta_0}(h) + \frac{\widehat{\beta_1}}{2h}(h)^2 + \frac{\widehat{\beta_2}}{3h^2}(h)^3\right] \\ &= \left(\frac{\pi}{40000}\right) \left[\widehat{\beta_0} + \frac{\widehat{\beta_1}}{2} + \frac{\widehat{\beta_2}}{3}\right] d^2\, h \end{aligned}$$

$$v = k\, d^2\, h \tag{8.4}$$

Conclusão: a equação de forma parabólica, implica numa equação de volume segundo o modelo da variável combinada de Spurr sem o intercepto, onde parâmetro da inclinação é dada pela expressão:

$$k = \left(\frac{\pi}{40000}\right) \left[\widehat{\beta_0} + \frac{\widehat{\beta_1}}{2} + \frac{\widehat{\beta_2}}{3}\right].$$

que é totalmente controlada pelas estimativas dos parâmetros da equação de forma.

Na equação de volume comercial apresentada na fórmula 8.3, o volume é obtido em função da altura comercial (h_c), a qual é geralmente desconhecida, pois a utilização da madeira é sempre definida em função de um diâmetro mínimo (d_{MIN}) da tora. Para obtermos o volume comercial a partir de um diâmetro mínimo arbitrário, é necessário estimar a altura ao longo do tronco em função do diâmetro, isto é, inverter a fórmula 8.2:

$$\widehat{\vec{h}} = \frac{-\widehat{\beta_1}h - \sqrt{(\widehat{\beta_1}h)^2 - 4\widehat{\beta_2}\left[\widehat{\beta_0}h^2 - \left((\vec{d})^2 h^2/d^2\right)\right]}}{2\widehat{\beta_2}}$$

O sistema de equações baseado no modelo parabólico para a equação de forma é constituído, portanto, por de três fórmulas:

1. Altura comercial em função do diâmetro mínimo:

$$\widehat{h_c} = \frac{-\widehat{\beta_1}h - \sqrt{(\widehat{\beta_1}h)^2 - 4\widehat{\beta_2}\left[\widehat{\beta_0}h^2 - (d^2_{\text{MIN}}h^2/d^2)\right]}}{2\widehat{\beta_2}}$$

2. Volume comercial em função da altura comercial:

$$v(h_c) \quad = \quad \left(\frac{\pi}{40000}\right) d^2 \left[\widehat{\beta_0}(h_c) + \frac{\widehat{\beta_1}}{2h}(h_c)^2 + \frac{\widehat{\beta_2}}{3h^2}(h_c)^3\right]$$

3. Equação de volume (volume total):

$$v \quad = \quad k\, d^2\, h$$

8.3.2 Exemplo do Modelo Parabólico

O modelo parabólico foi ajustado para árvores de *Eucalyptus* spp., resultando nas seguintes estimativas dos parâmetros:

$$\begin{aligned} \widehat{\beta_0} &= 1.5037 \\ \widehat{\beta_1} &= -3.3590 \\ \widehat{\beta_2} &= 2.0082 \end{aligned}$$

Deseja-se estimar o volume para diferentes usos, segundo os critérios do começo deste capítulo para uma árvore com d = 27 cm e h = 30 m.

1º Passo: volume total do tronco:

$$\begin{aligned} k &= \left(\frac{\pi}{40000}\right)\left[1.5037 + \frac{-3.3590}{2} + \frac{2.0082}{3}\right] = 3.8767 \times 10^{-5} \\ \widehat{v} &= (3.8767 \times 10^{-5})\, 27^2\, 30 = \boxed{0.8478 \text{ m}} \end{aligned}$$

2º Passo: altura comercial para os diferentes usos:

$$\begin{aligned} &= [-(-3.3590(30)) - \\ &\quad \sqrt{(-3.3560(30))^2 - 4(2.0082)\left[1.5037(30)^2 - ((d_{\text{MIN}})^2(30)^2/(27)^2)\right]}\ /\ [2(2.0082)] \\ \widehat{h_c} &= \frac{100.7700 - \sqrt{-716.4363 + 9.9170(d_{\text{MIN}})^2}}{4.0164} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll} \text{Serraria} & \Rightarrow d_{\text{MIN}} = 30 \text{ cm} & \Rightarrow \widehat{h_c} = 2.5314 \approx 2.5 \text{ m} \\ \text{Fibra} & \Rightarrow d_{\text{MIN}} = 20 \text{ cm} & \Rightarrow \widehat{h_c} = 10.8948 \approx 11 \text{ m} \\ \text{Lenha} & \Rightarrow d_{\text{MIN}} = 10 \text{ cm} & \Rightarrow \widehat{h_c} = 20.9588 \approx 21 \text{ m} \\ \text{Resíduo} & \Rightarrow d_{\text{MIN}} = 0 \text{ cm} & \Rightarrow \widehat{h_c} = h = 30 \text{ m} \end{array}$$

3º Passo: volume até altura comercial:

$$\begin{aligned} v(h_c) &= (0.00007854)(27)^2 \left[1.5037(h_c) + \frac{-3.3590}{2(30)}(h_c)^2 + \frac{2.0082}{3(30)^2}(h_c)^3\right] \\ &= 0.0573\left[1.5037(h_c) - 0.0560(h_c)^2 + (7.438 \times 10^{-4})(h_c)^3\right] \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll} \text{Serraria} & \Rightarrow \widehat{h_c} = 2.5 \text{ m} & \Rightarrow \widehat{v}(2.5) = 0.1959 \text{ m}^3 \\ \text{Fibra} & \Rightarrow \widehat{h_c} 11 \text{ m} & \Rightarrow \widehat{v}(11) = 0.6159 \text{ m}^3 \\ \text{Lenha} & \Rightarrow \widehat{h_c} = 21 \text{ m} & \Rightarrow \widehat{v}(21) = 0.7888 \text{ m}^3 \\ \text{Resíduo} & \Rightarrow \widehat{h_c} = h & \Rightarrow \widehat{v}(30) = v = 0.8478 \text{ m}^3 \end{array}$$

4º Passo: volume para os usos por diferença dos volumes das alturas comerciais:

$$\begin{array}{llll} v_{\text{Serraria}} & = \widehat{v}(2.5) & = & \boxed{0.1959 \text{ m}^3} \\ v_{\text{Fibra}} & = \widehat{v}(11) - \widehat{v}(2.5) & = 0.6159 - 0.1959 = & \boxed{0.4200 \text{ m}^3} \\ v_{\text{Lenha}} & = \widehat{v}(21) - \widehat{v}(11) & = 0.7888 - 0.6159 = & \boxed{0.1729 \text{ m}^3} \\ v_{\text{Resíduo}} & = \widehat{v}(30) - \widehat{v}(21) & = 0.8478 - 0.7888 = & \boxed{0.0590 \text{ m}^3} \end{array}$$

A estimativa dos volumes para os diferenes usos envolve grande quantidade de cálculos, pois estes quatro passos devem ser aplicados a todas as árvores de um levantamento florestal. Entretanto, tal sistema pode ser fácilmente automatizado utilizando-se um sistema computadorizado de modo a minimizar a influência dos erros de origem humana nos resultados dos levantamentos florestais.

8.4 Sistema de Equações índices

O uso de equações de forma possui algumas desvantagens:

- Bons modelos de equação de forma são complexos e exigem maior experiência estatística no seu ajuste.
- Os melhores modelos de equação de forma podem não possuir uma solução explícita para integral que calcula o volume em função da altura comercial, exigindo o uso de **métodos numéricos** para obter as soluções.

A outra abordagem na estimativa do volume para usos múltiplos da madeira é o de sistema equações índices de volume comercial que é um sistema com três equações:

1. Equação de Volume (total): é uma equação de volume que fornece o volume total em função do DAP e altura total.

   O modelo de Schumacher-Hall é frequentemente utilizado:

$$\begin{aligned} \widehat{v} &= \widehat{\beta_0}\, d^{\widehat{\beta_1}}\, h^{\widehat{\beta_2}} \\ \log(v) &= \beta_0^* + \beta_1 \log(d) + \beta_2 \log(h) + \varepsilon \quad \text{[forma de ajuste]} \end{aligned} \tag{8.5}$$

   onde $\widehat{\beta_0} = \exp[\widehat{\beta_0^*}]$.

2. Índice de Volume Comercial pela Razão dos Diâmetros: o índice de volume comercial é a razão entre o volume comercial (v_c) e o volume total (v), enquanto que a razão dos diâmetros é a razão entre o diâmetro ao longo do tronco ($\vec{d}$) e o DAP (d).

$$\begin{aligned} I_{\vec{d}/d} = \widehat{\left[\frac{v_c}{v}\right]} &= 1 - \widehat{\beta_3} \frac{(\vec{d})^{\widehat{\beta_4}}}{d^{\widehat{\beta_5}}} \qquad (8.6) \\ \log\left[1 - \frac{v_c}{v}\right] &= \beta_3^* + \beta_4 \log(\vec{d}) + \beta_5 \log(d) + \varepsilon \quad \text{[forma de ajuste]} \end{aligned}$$

onde $\widehat{\beta_3} = \exp[\widehat{\beta_3^*}]$.

3. Índice de Volume Comercial pela Razão das Alturas: o índice de volume comercial é o mesmo da equação acima, enquanto que a razão das alturas é a razão entre a altura ao longo do tronco ($\vec{h}$) e a altura total (h).

$$\begin{aligned} I_{\vec{h}/h} = \widehat{\left[\frac{v_c}{v}\right]} &= 1 - \widehat{\beta_6} \frac{(h - \vec{h})^{\widehat{\beta_7}}}{h^{\widehat{\beta_8}}} \qquad (8.7) \\ \text{Forma de Ajuste:} \quad \log\left[1 - \frac{v_c}{v}\right] &= \beta_6^* + \beta_5 \log(h - \vec{h}) + \beta_8 \log(h) + \varepsilon \end{aligned}$$

onde $\widehat{\beta_6} = \exp[\widehat{\beta_6^*}]$.

8.4.1 Equação de Forma Implícita

Do mesmo modo que toda equação de forma possui uma equação de volume implícita, todo sistema de equações índices possui uma equação de forma implícita. Esta equação é obtida igualando-se a equações 8.6 e 8.7

$$I_{\vec{d}/d} = I_{\vec{h}/h} \quad \Longrightarrow \quad 1 - \widehat{\beta_3} \frac{(\vec{d})^{\widehat{\beta_4}}}{d^{\widehat{\beta_5}}} = 1 - \widehat{\beta_6} \frac{(h - \vec{h})^{\widehat{\beta_7}}}{h^{\widehat{\beta_8}}},$$

e solucionando-se a expressão para $\vec{d}$

$$d = \left(\frac{\widehat{\beta_6}}{\widehat{\beta_3}}\right)^{1/\widehat{\beta_4}} \frac{d^{\widehat{\beta_5}/\widehat{\beta_4}} \quad (h - \vec{h})^{\widehat{\beta_7}/\widehat{\beta_4}}}{h^{\widehat{\beta_8}/\widehat{\beta_4}}}$$

ou para $\vec{h}$

$$h = \left(\frac{\widehat{\beta_3}}{\widehat{\beta_6}}\right)^{1/\widehat{\beta_7}} \frac{h^{\widehat{\beta_8}/\widehat{\beta_7}} \quad (\vec{d})^{\widehat{\beta_4}/\widehat{\beta_7}}}{d^{\widehat{\beta_5}/\widehat{\beta_7}}}$$

conforme desejarmos.

O sistema de equações índices se caracteriza por:

- Estimar 8 parâmetros através de três equações ajustadas por regressão linear.

- Resultar em uma equação de forma implícita.
- Formar um sistema **compatível** de equação de volume, de volume comercial e de forma.

8.4.2 Exemplo de Sistema de Equações Índices

O sistema de equações foi ajustado para uma floresta de *Eucalyptus grandis* em 1ª rotação, obtendo-se o seguinte ajuste:

$$\left.\begin{aligned}\widehat{\beta_0} &= 2.706\times10^{-5}\\ \widehat{\beta_1} &= 1.8298\\ \widehat{\beta_2} &= 1.1712\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad v = (2.706\times10^{-5})\, d^{1.8298}\, h^{1.1712}$$

$$\left.\begin{aligned}\widehat{\beta_3} &= 0.3704\\ \widehat{\beta_4} &= 3.1128\\ \widehat{\beta_5} &= 2.8828\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad I_{\vec{d}/d} = 1 - 0.3704\frac{(\vec{d})^{3.1128}}{d^{2.8828}}$$

$$\left.\begin{aligned}\widehat{\beta_6} &= 1.0180\\ \widehat{\beta_7} &= 2.4643\\ \widehat{\beta_8} &= 2.4625\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad I_{\vec{h}/h} = 1 - 1.0180\frac{(h-\vec{h})^{2.4643}}{h^{2.4625}}$$

Estes resultados geram a seguinte equação de forma:

$$\left.\begin{aligned}(\widehat{\beta_3}/\widehat{\beta_6})^{1/\widehat{\beta_7}} &= 0.6635\\ \widehat{\beta_8}/\widehat{\beta_7} &= 0.9993\\ \widehat{\beta_4}/\widehat{\beta_7} &= 1.2632\\ \widehat{\beta_5}/\widehat{\beta_7} &= 1.1698\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \vec{h} = h - 0.6635\frac{h^{0.9993}(\vec{d})^{1.2632}}{d^{1.1698}}$$

Apliquemos este sistema a uma árvore com d = 37 cm e h = 30 m, utilizando os mesmos critérios de uso exposto no início deste capítulo:

1º Passo - volume total:

$$\widehat{v} = (2.706\times10^{-5})\,(37)^{1.8298}\,(30)^{1.1712} = \boxed{1.0760\ \mathrm{m}^3}$$

2º Passo - altura comercial para cada diâmetro limite de utilização:

$$\begin{aligned}\widehat{h_c} &= (30) - 0.6635\frac{(30)^{0.9993}(d_{\text{MIN}})^{1.2632}}{(37)^{1.1698}}\\ &= 30 - 0.2907(d_{\text{MIN}})^{1.2632}\end{aligned}$$

Serraria	$\Rightarrow d_{\text{MIN}} = 30$ cm	$\Rightarrow \widehat{h_c} = 8.6526 \approx 8.7$ m
Fibra	$\Rightarrow d_{\text{MIN}} = 20$ cm	$\Rightarrow \widehat{h_c} = 17.2090 \approx 17.2$ m
Lenha	$\Rightarrow d_{\text{MIN}} = 10$ cm	$\Rightarrow \widehat{h_c} = 24.6710 \approx 24.7$ m
Resíduo	$\Rightarrow d_{\text{MIN}} = 0$ cm	$\Rightarrow \widehat{h_c} = h = 30$ m

3º Passo - volume acumulado até a altura comercial:

$$\begin{aligned}
\widehat{v}(h_c) &= [I_{\vec{d}/h}]\,\widehat{v} \\
&= \left[1 - 1.0180\frac{(30-\widehat{h_c})^{2.4643}}{30^{2.4625}}\right]1.0760 \\
&= 1.0760 - (2.524\times 10^{-4})(30-\widehat{h_c})^{2.4643}
\end{aligned}$$

Serraria	$\Rightarrow \widehat{h_c} = 8.7$ m	$\Rightarrow \widehat{v}(8.7) = 0.5911$ m^3
Fibra	$\Rightarrow \widehat{h_c}17.2$ m	$\Rightarrow \widehat{v}(17.2) = 0.9409$ m^3
Lenha	$\Rightarrow \widehat{h_c} = 24.7$ m	$\Rightarrow \widehat{v}(24.7) = 1.0607$ m^3
Resíduo	$\Rightarrow \widehat{h_c} = h$	$\Rightarrow \widehat{v}(30) = \widehat{v} = 1.0760$ m^3

4º Passo - volume para os diversos usos por diferença:

$$\begin{aligned}
v_{\text{Serraria}} &= \widehat{v}(8.7) && = \boxed{0.5911\text{ m}^3} \\
v_{\text{Fibra}} &= \widehat{v}(17.2) - \widehat{v}(8.7) && = 0.9409 - 0.5911 = \boxed{0.3498\text{ m}^3} \\
v_{\text{Lenha}} &= \widehat{v}(24.7) - \widehat{v}(17.2) && = 1.0607 - 0.9409 = \boxed{0.1198\text{ m}^3} \\
v_{\text{Resíduo}} &= \widehat{v}(30) - \widehat{v}(24.7) && = 1.0760 - 1.0607 = \boxed{0.0153\text{ m}^3}
\end{aligned}$$

APÊNDICE A

SIMBOLOGIA UTILIZADA

A simbologia utilizada é baseada no padrão da IUFRO (International Union of Forestry Research Organizations) e segue as seguintes regras:

Letras minúsculas se referem a atributos de árvores individuais;

Letras maiúsculas se referem a totais por unidade de área;

Letras gregas se referem a parâmetros populacionais desconhecidos e coeficientes de equações a serem estimados.

a_{leaf} Área foliar de uma árvore (m^2).

a_b Área da secção transversal do tronco na base da árvore.

b Biomassa de uma árvore individual (kg).

c_a Projeção horizontal da área da copa (m^2).

c_l Comprimento da copa viva, diferença entre a altura total da árvore e a altura da base da copa (m).

c_r Razão de copa, razão entre o comprimento de copa e a altura total da árvore.

c_w Diâmetro da copa (m).

c_{wo} Diâmetro da copa de uma árvore de crescimento livre (crescimento em área totalmente aberta) com diâmetro igual à árvore sob consideração (arvore sujeito).

d DAP (diâmetro a altura do peito), isto é, diâmetro do tronco da árvore (incluindo a casca) a 1.30 m de altura do solo (cm).

d_b Diâmetro na base da árvore.

$\overline{d}$ Média aritmética do DAP de um conjunto de árvores (cm). $\overline{d} = (\sum d)/N$

d_g Diâmetro médio quadrático, isto é, média quadrática dos DAPs de um conjunto de árvores (cm). $d_g = \sqrt{\sum d^2/N}$

$d_{0.2}$ Diâmetro do tronco da árvore a 20% da altura total da árvore (cm).

$\vec{d}$ Diâmetro do tronco ao longo do tronco (cm), isto é, como uma variável que depende da altura ao longo do tronco a partir da base ($\vec{h}$).

f Fator de forma de uma árvore. $f = v/(gh)$

f_a Fator de forma absoluto.

g Área seccional de uma árvore, isto é, área da secção transversal do tronco da árvore a 1.30 m de de altura do solo (m^2). $g = (\pi/40000)d^2$

h Altura total de uma árvore individual (m).

h_c Altura comercial de uma árvore individual (m).

$\vec{h}$ Altura ao longo do tronco a partir da base (m), isto é, altura como uma variável que depende do diâmetro ao longo do tronco de uma árvore ($\vec{d}$).

h_{bc} Altura da base da copa (m).

$\overline{h}$ Média aritmética das alturas totais de um conjunto de árvores (m).

h_T Altura média das dominantes, isto é, média aritmética das alturas totais das árvores <u>dominantes</u> num conjunto de árvores (m). Árvores dominantes são geralmente definidas como as 100 árvores de maior DAP em um hectare.

l Comprimento de tora ou torete (m).

v Volume sólido total com casca de uma árvore (m^3 ou dm^3).

v_c Volume sólido comercial com casca de uma árvore (m^3 ou dm^3). Em geral, é o volume sólido de todos os toretes de uma árvore com diâmetro superior ao diâmetro mínimo para utilização da madeira (d_{MIN}).

v_u Volume sólido sem casca de uma árvore (m^3 ou dm^3).

v_{CIL} Volume cilíndrico de uma árvore, definido como o produto da área seccional e a altura total. $v_{\text{CIL}} = g\,h$.

v_e Volume empilhado (com casca) de uma árvore (m^3).

APÊNDICE B

DEDUÇÃO DAS FÓRMULAS DO VOLUME DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS TRUNCADOS

B.1 Abordagem Geral

Para se obter o volume dos sólidos truncados devemos utilizar a fórmula (5.3), mudando os limites de integração. Como o sólido de revolução será truncado em algum ponto entre a base e o topo, a integração deverá ter como limites $x = 0$ e $x = l$, onde l é uma altura qualquer a partir da base do sólido, podendo ser intepretado como o comprimento da tora:

$$
\begin{aligned}
v(l) &= \int_0^l \left(\frac{\pi}{40000}\right) \frac{d_b^2}{h^{2r}} (h-x)^{2r} dx \\
&= \left(\frac{\pi}{40000}\right) \frac{d_b^2}{h^{2r}} \int_0^l (h-x)^{2r} dx \\
&= \left(\frac{\pi}{40000}\right) \frac{d_b^2}{h^{2r}} \left[-\frac{(h-x)^{2r+1}}{2r+1}\right]_0^l
\end{aligned}
$$

substituindo-se os limites de integração obtemos uma fórmula do volume dos sólidos geométricos truncados na altura l:

$$
v(l) = \left(\frac{\pi}{40000}\right) \frac{d_b^2}{h^{2r}} \left[\frac{h^{2r+1} - (h-l)^{2r+1}}{2r+1}\right] \qquad \text{(B.1)}
$$

Esta equação, no entanto, fornece o volume do sólido truncado em função de h que é a altura total do sólido geométrico. A figura B.1 mostra que, ao aplicarmos a idéia dos sólidos geométricos truncados para medirmos o volume de toretes, h é sempre desconhecida, pois podemos medir apenas o comprimento do torete (l), a área face da base do torete (a_b) e área da face to topo do torete (a_l).

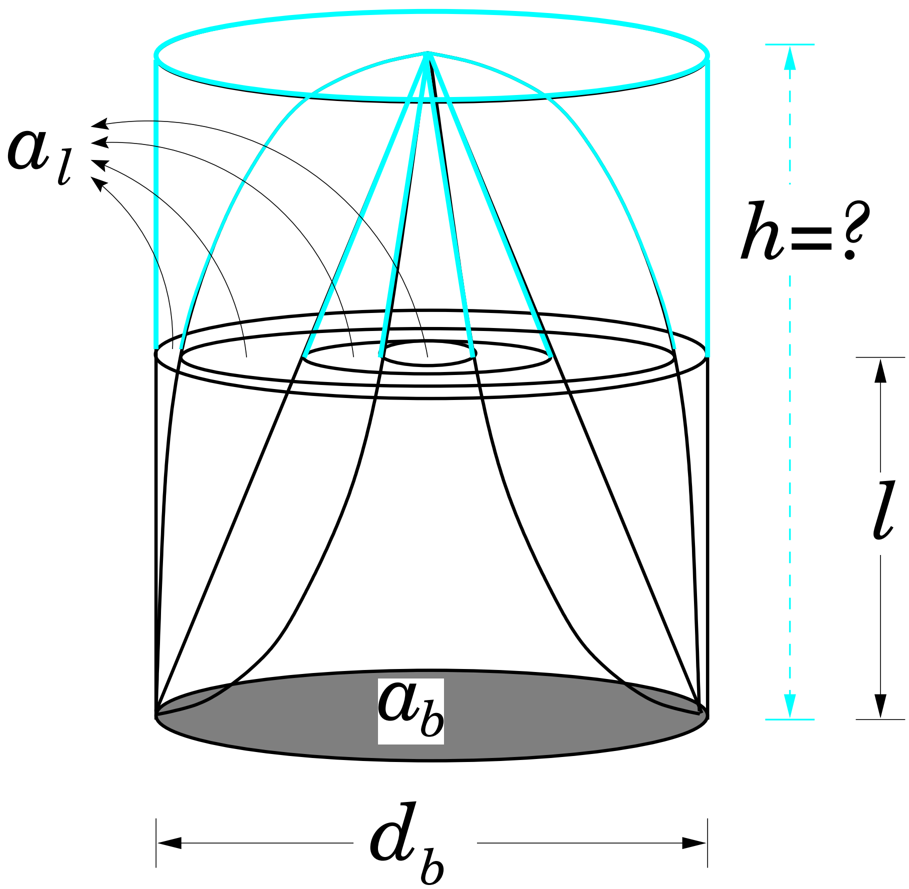

Figura B.1: Representação dos toretes do tronco de uma árvore através sólidos geométricos truncados. A altura total do sólido (h) é sempre desconhecida, mas é possível se medir o comprimento do torete (l) e obter as áreas das duas faces do torete (base: a_b e topo: a_l) medindo-se os diâmetros.

Para que a fórmula (B.1) seja aplicável, é necessário transformá-la numa expressão onde o volume do sólido truncado seja função do comprimento da tora (l), área da base (a_b) e área do topo (a_l). O primeiro passo nesta direção é invertermos a equação (5.1), apresentando a altura do tronco em função do raio da secção transversal:

$$y = \frac{d_b/2}{h^r}(h-x)^r \quad \Longrightarrow \quad x = h\left[1 - (\frac{2y}{d_b})^{1/r}\right]$$

Para $x = l$, temos $2y = d_l$ ou o diâmetro da seccção do topo do sólido (secção na altura l), e a relação pode ser reescrita como:

$$l = h\left[1 - (\frac{d_l}{d_b})^{1/r}\right] \tag{B.2}$$

A metodologia para se obter a expressão do volume dos sólidos geométricos truncados é dependente do valor do coeficiente r. Os passos para se chegar a uma expressão do volume são:

1. Definir o valor do coeficiente r e desenvolver a equação (B.1) abrindo o polinômio de graus $(2r+1)$.

2. Aberto o polinômio, substituir o valor de l pela expressão (B.2) e simplificá-la.

3. Neste último processo de simplificação, a variável h deve desaparecer, permanecendo apenas as variáveis l, d_b e d_l que podem ser reorganizadas em termos de l, a_b e a_l.

Segue a aplicação desta metodologia para os principais sólidos geométricos.

B.2 Cilindro ($r = 0$)

Desenvolvendo a equação (B.1) com $r = 0$:

$$\begin{aligned} v(l) &= \left(\frac{\pi}{40000}\right)\frac{d_b^2}{h^{2(0)}}\left[\frac{h^{2(0)+1} - (h-l)^{2(0)+1}}{2(0)+1}\right] \\ &= \left(\frac{\pi}{40000}\right)d_b^2[h - h + l] \\ &= \left(\frac{\pi}{40000}\right)d_b^2 l = a_b\, l \end{aligned}$$

B.3 Cone ($r = 1$)

Aplicando $r = 1$ na equação (B.2) temos:

$$l = h\left[1 - (\frac{d_l}{d_b})\right]$$

enquanto que na equação (B.1) o resultado é:

$$\begin{aligned}
v(l) &= \left(\frac{\pi}{40000}\right)\frac{d_b^2}{h^2}\left[\frac{h^3-(h-l)^3}{3}\right]\\
&= \left(\frac{\pi}{40000}\right)d_b^2\frac{1}{3}\left[\frac{h^3-(h-l)^3}{h^2}\right]\\
&= \left(\frac{\pi}{40000}\right)d_b^2\frac{1}{3}\left[\frac{h^3-(h^3-3h^2l+3hl^2-l^3)}{h^2}\right]\\
&= \left(\frac{\pi}{40000}\right)d_b^2\frac{1}{3}\left[\frac{h^3-h^3+3h^2l-3hl^2+l^3}{h^2}\right]\\
&= \left(\frac{\pi}{40000}\right)d_b^2\frac{l}{3}\left[\frac{3h^2-3hl+l^2}{h^2}\right]
\end{aligned}$$

Substituindo a primeira expressão nesta última obtemos:

$$\begin{aligned}
v(l) &= \left(\frac{\pi}{40000}\right)d_b^2\frac{l}{3}\left[\frac{3h^2-3h(h(1-(d_l/d_b))+(h(1-(d_l/d_b)))^2}{h^2}\right]\\
&= \left(\frac{\pi}{40000}\right)d_b^2\frac{l}{3}\left[3-3(1-(d_l/d_b)+(1-(d_l/d_b))^2\right]\\
&= \left(\frac{\pi}{40000}\right)d_b^2\frac{l}{3}\left[3-3+3(d_l/d_b))+1-2(d_l/d_b)-(d_l/d_b)^2\right]\\
&= \left(\frac{\pi}{40000}\right)d_b^2\frac{l}{3}\left[1+\frac{d_l}{d_b}-\frac{d_l^2}{d_b^2}\right]\\
&= \frac{l}{3}\left[\left(\frac{\pi}{40000}\right)d_b^2+\left(\frac{\pi}{40000}\right)d_bd_l-\left(\frac{\pi}{40000}\right)d_l^2\right]\\
&= \frac{l}{3}[a_b+\sqrt{a_ba_l}+a_l]
\end{aligned}$$

onde a_l é a área da secção na altura l.

B.4 Parabolóide ($r = 1/2$)

Desenvolvendo a equação (B.2) a partir de $r = 1/2$:

$$l = h\left[1-(\frac{d_l}{d_b})^2\right].$$

Já na equação (B.1) o desenvolvimento fica:

$$v(l) = \left(\frac{\pi}{40000}\right)\frac{d_b^2}{h}\left[\frac{h^2-(h-l)^2}{2}\right]$$

$$
\begin{aligned}
v(l) &= \left(\frac{\pi}{40000}\right) d_b^2 \frac{1}{2}\left[\frac{h^2-(h-l)^2}{h}\right] \\
v(l) &= \left(\frac{\pi}{40000}\right) d_b^2 \frac{1}{2}\left[\frac{h^2-h^2+2hl-l^2}{h}\right] \\
v(l) &= \left(\frac{\pi}{40000}\right) d_b^2 \frac{l}{2}\left[\frac{2h-l}{h}\right]
\end{aligned}
$$

Substiuindo a expressão de l nesta última equação:

$$
\begin{aligned}
v(l) &= \left(\frac{\pi}{40000}\right) d_b^2 \frac{l}{2}\left[\frac{2h-h(1-(d_l/d_b)^2)}{h}\right] \\
v(l) &= \left(\frac{\pi}{40000}\right) d_b^2 \frac{l}{2}\left[\frac{2h-h+h(d_l/d_b)^2}{h}\right] \\
v(l) &= \left(\frac{\pi}{40000}\right) d_b^2 \frac{l}{2}\left[1+\frac{d_l^2}{d_b^2}\right] \\
v(l) &= \frac{l}{2}\left[\left(\frac{\pi}{40000}\right) d_b^2 + \left(\frac{\pi}{40000}\right) d_b^2 \frac{d_l^2}{d_b^2}\right] \\
v(l) &= \frac{l}{2}\left[\left(\frac{\pi}{40000}\right) d_b^2 + \left(\frac{\pi}{40000}\right) d_l^2\right] \\
v(l) &= \frac{l}{2}[a_b + a_l]
\end{aligned}
$$

B.5 Nelóide ($r = 3/2$)

Aplicando o valor $r = 3/2$ na equações (B.2) e (B.1) obtemos:

$$
l = h\left[1-(\frac{d_l}{d_b})^{2/3}\right] \tag{B.3}
$$

$$
v(l) = \left(\frac{\pi}{40000}\right) \frac{d_b^2}{h^3}\left[\frac{h^4-(h-l)^4}{4}\right] \tag{B.4}
$$

Desenvolvendo a expressão que envolve o polinômio de quarto grau na última equação acima:

$$
\begin{aligned}
h^4-(h-l)^4 &= h^4-(h^4-4h^3l+6h^2l^2-4hl^3+l^4) \\
&= h^4-h^4+4h^3l-6h^2l^2+4hl^3-l^4 \\
&= l\left[4h^3-6h^2l+4hl^2+l^3\right].
\end{aligned}
$$

Os valores de l *dentro dos colchetes* podem ser substituídos agora pela expressão (B.3):

$$
h^4-(h-l)^4 = l\left\{4h^3-6h^2\left[h\left(1-\left(\frac{d_l}{d_b}\right)^{2/3}\right)\right]+4h\left[h\left(1-\left(\frac{d_l}{d_b}\right)^{2/3}\right)\right]^2\right.
$$

$$
\begin{aligned}
& -\left[h\left(1-\left(\frac{d_l}{d_b}\right)^{2/3}\right)\right]^3\Bigg\} \\
= \quad & l\left\{4h^3-6h^3\left[1-\left(\frac{d_l}{d_b}\right)^{2/3}\right]+4h^3\left[1-\left(\frac{d_l}{d_b}\right)^{2/3}\right]^2\right. \\
& \left.-h^3\left[1-\left(\frac{d_l}{d_b}\right)^{2/3}\right]^3\right\} \\
= \quad & lh^3\left\{4-6+6\left(\frac{d_l}{d_b}\right)^{2/3}+4\left[1-\left(\frac{d_l}{d_b}\right)^{2/3}\right]^2\right. \\
& \left.-\left[1-\left(\frac{d_l}{d_b}\right)^{2/3}\right]^3\right\} \\
= \quad & lh^3\left\{4-6+6\left(\frac{d_l}{d_b}\right)^{2/3}+4\left[1-2\left(\frac{d_l}{d_b}\right)^{2/3}+\left(\frac{d_l}{d_b}\right)^{4/3}\right]\right. \\
& \left.-\left[1-3\left(\frac{d_l}{d_b}\right)^{2/3}+3\left(\frac{d_l}{d_b}\right)^{4/3}-\left(\frac{d_l}{d_b}\right)^{2}\right]\right\} \\
= \quad & lh^3\left\{4-6+6\left(\frac{d_l}{d_b}\right)^{2/3}+4-8\left(\frac{d_l}{d_b}\right)^{2/3}+4\left(\frac{d_l}{d_b}\right)^{4/3}\right. \\
& \left.-1+3\left(\frac{d_l}{d_b}\right)^{2/3}-3\left(\frac{d_l}{d_b}\right)^{4/3}+\left(\frac{d_l}{d_b}\right)^{2}\right\} \\
= \quad & lh^3\left\{1+\left(\frac{d_l}{d_b}\right)^{2/3}+\left(\frac{d_l}{d_b}\right)^{4/3}+\left(\frac{d_l}{d_b}\right)^{2}\right\}
\end{aligned}
$$

Esta expressão pode ser aplicada à equação (B.4):

$$
\begin{aligned}
v(l) \quad = \quad & \left(\frac{\pi}{40000}\right)\quad\frac{d_b^2}{h^3}\quad\frac{lh^3}{4}\left[1+\left(\frac{d_l}{d_b}\right)^{2/3}+\left(\frac{d_l}{d_b}\right)^{4/3}+\left(\frac{d_l}{d_b}\right)^{2}\right] \\
= \quad & \frac{l}{4}\quad\left(\frac{d_b^2\pi}{40000}\right)\left[1+\left(\frac{d_l}{d_b}\right)^{2/3}+\left(\frac{d_l}{d_b}\right)^{4/3}+\left(\frac{d_l}{d_b}\right)^{2}\right\} \\
= \quad & \frac{l}{4}\left[\left(\frac{d_b^2\pi}{40000}\right)+\left(\frac{d_b^2\pi}{40000}\right)\left(\frac{d_l}{d_b}\right)^{2/3}+\left(\frac{d_b^2\pi}{40000}\right)\left(\frac{d_l}{d_b}\right)^{4/3}\right. \\
& \left.+\left(\frac{d_b^2\pi}{40000}\right)\left(\frac{d_l}{d_b}\right)^{2}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{l}{4}\left[\left(\frac{\pi}{40000}\right)d_b^2 + \left(\frac{\pi}{40000}\right)\left(\frac{d_b^3 d_l}{d_b}\right)^{2/3} + \left(\frac{\pi}{40000}\right)\left(\frac{d_b^{3/2} d_l}{d_b}\right)^{4/3}\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \left(\frac{\pi}{40000}\right)\left(\frac{d_b d_l}{d_b}\right)^{2}\right] \\
v(l) &= \frac{l}{4}\left[\left(\frac{\pi}{40000}\right)d_b^2 + \left(\frac{\pi}{40000}\right)\left(d_b^2 d_l\right)^{2/3} + \left(\frac{\pi}{40000}\right)\left(d_b^{1/2} d_l\right)^{4/3}\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \left(\frac{\pi}{40000}\right)d_l^2\right] \\
v(l) &= \frac{l}{4}\left[a_b + \sqrt[3]{a_b^2 a_l} + \sqrt[3]{a_b a_l^2} + a_l\right]
\end{aligned}
$$